Aufgabe 1 *(Lift einer stetigen Kurve)*
Es sei $\omega \in C^0(I, S^1)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $I = [0, 1]$ und $\omega(0) = 1$ sind.

(a) Setze

$$\begin{aligned} t_0 &:= 0, \\ t_1 &:= \min \omega^{-1}\{-1\} \cap (t_0, 1] \\ t_j &:= \min \omega^{-1}\{(-1)^j\} \cap (t_{j-1}, 1] \end{aligned}$$

Warum gibt es nur endlich viele t_j? Nehmen Sie an, die Folge bricht nicht ab. Warum würde dann $\tilde{t} = \lim_{j\to\infty} t_j$ in I existieren. Was wäre $\omega(\tilde{t})$?

Seien also $t_0 < \cdots < t_l$ sämtliche t_j. Wähle aneinandergrenzende Intervalle $I_j = [s_j, s_{j+1}]$, $j = 0, \dots, l$, mit $I_j \cap \{t_0, \dots, t_l\} = \{t_j\}$, die I überdecken.

(b) Es seien

$$\begin{aligned} \log_+ \colon S^1 \backslash \{1\} &\to (0, 2\pi) \\ e^{i\varphi} &\mapsto \varphi \in (0, 2\pi) \\ \log_- \colon S^1 \backslash \{-1\} &\to (-\pi, \pi) \\ e^{i\varphi} &\mapsto \varphi \in (-\pi, \pi) \end{aligned}$$

Desweiteren seien $\log_{k,\pm} = 2\pi k + \log_\pm, k \in \mathbb{Z}$. Welche Logarithmenzweige sind auf I_j definiert?

(c) Nehmen Sie geeignete Logarithmen $\log_{I_j}$ von $\omega|_{I_j}$ und nennen diese θ_j, so dass sich die θ_j zu einer stetigen Funktion θ zusammenfügen mit $\theta|_{I_j} = \theta_j$ und $\theta(0) = 0$.(Hier müssen Sie nur eine Stetigkeitsbedingung für die Intervallgrenzen aufstellen.)

(d) Überprüfen Sie, dass $\theta \in C^0(I, \mathbb{R})$ ist und dass $e^{i\theta} = \omega$ ist.

Aufgabe 2 *(Stückweise glatte Approximation)* Wiederum sei $I = [0, 1]$.

(a) Für eine Funktion $\theta \in C^0(I, \mathbb{R})$ definiere die affine Approximation durch k Sehnen. Es seien $t_j := \frac{j}{k}$, $j = 1, \dots, k$.

$$\theta_k(t) := \theta(t_{j-1}) + k(t - t_{j-1})(\theta(t_j) - \theta(t_{j-1})), \quad t \in [t_{j-1}, t_j]$$

Zeigen Sie, dass $\|\theta - \theta_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. *Hinweis:* θ ist gleichmäßig stetig.

(b) Sei $\omega = e^{i\theta}$. Setze $\omega_k := e^{i\theta_k}$. Zeigen Sie $\|\omega - \omega_k\|_\infty \to 0$ für $k \to \infty$. *Hinweis:* Für eine differenzierbare Funktion f gilt aufgrund des Mittelwertsatzes

$$|f(r) - f(s)| \le \|df\|_\infty |r - s|$$