
Aufgabe 1 Es sei c eine einfach C^1-geschlossene, reguläre Kurve von I nach $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft: Für alle $s \in I$ gilt

$$\langle c(t) - c(s), \nu(s) \rangle \geq 0 \qquad \text{für alle } t \in I \tag{1}$$

oder

$$\langle c(t) - c(s), \nu(s) \rangle \leq 0 \qquad \text{für alle } t \in I \tag{2}$$

Wir werden beweisen, dass dann bereits c konvex ist.

(a) Warum ist

$$\varphi\colon (s,t) \mapsto \langle c(t) - c(s), \nu(s) \rangle$$

eine stetige Funktion von $I \times I$ nach $\mathbb{R}$?

(b) Setze

$$f\colon s \mapsto \inf_{t \in I} \varphi(s,t)$$
$$g\colon s \mapsto \sup_{t \in I} \varphi(s,t)$$

Begründen Sie, warum $f^{-1}(0)$ und $g^{-1}(0)$ abgeschlossen sind.

(c) Zeigen Sie, dass genau die $s \in f^{-1}(0)$ Bedingung (1) erfüllen und genau die $s \in g^{-1}(0)$ Bedingung (2).

(d) Warum ist $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = I$? Angenommen beide Mengen wären nichtleer, warum kann dann der Schnitt $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$ nicht leer sein?

(e) Welche Werte kann $\varphi(s,t)$ annehmen für $s \in f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0)$?

(f) Gäbe es ein solches s, wie sähe dann die Kurve c aus?

(g) Konstruieren Sie einen Widerspruch zur Regularität der Kurve und schließen Sie auf die Konvexität von der Kurve c

$$\varphi(s,t) \geq 0 \quad \forall s,t \in I$$

oder

$$\varphi(s,t) \leq 0 \quad \forall s,t \in I$$