

Lösungen der Präsenzaufgabe 5

Aufgabe 1

- (a) φ ist eine Verknüpfung stetiger Funktionen und damit stetig. Man bemerke, dass die Normale $t \mapsto \nu(t) = \frac{\dot{c}(t)}{|\dot{c}(t)|}$ stetig ist.
- (b) Ist $s \notin f^{-1}(0)$, so gibt es (s, t) , so dass $\varphi(s, t) > 0$ ist. Um diesen Punkt gibt es eine rechteckige Umgebung $I_1 \times I_2$ mit $\varphi^{-1}(s', t') > 0$ für alle $(s', t') \in I_1 \times I_2$. Folglich ist $f^{-1}(0) \cap I_1 = \emptyset$.
- (c) Ist Bedingung (1) für ein $s \in I$ erfüllt, so gilt für alle $t \in I$, dass $\varphi(s, t) \geq 0$ ist. Daher ist selbst das Infimum größer oder gleich 0. Ist andererseits $\inf_{t \in I} \varphi(s, t) \geq 0$, so gilt für alle $t \in I$, dass $\varphi(s, t) \geq 0$ ist.
- (d) Es ist für alle $s \in I$ Bedingung (1) oder Bedingung (2) erfüllt. Mengentheoretisch geschrieben $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = I$. Angenommen beide Mengen wären nichtleer, aber hätten leeren Schnitt. Dann wäre I nicht zusammenhängend, was nicht so ist.
- (e) Das Infimum aller Werte $\{\varphi(s, t) \mid t \in I\}$ ist größer gleich Null, das Supremum ist kleiner gleich Null, also muß $\varphi(s, t) = 0$ sein für alle $t \in I$.
- (f) Alle Vektoren $c(t) - c(s)$ liegen also auf der Geraden $\nu(s)^\perp$.
- (g) Da das Bild der Kurve kompakt ist, erreicht die Kurve Maxima bezüglich des Abstandes von $c(s)$. Dort wäre aber $c'(t) = 0$, was der Regularität von c widerspricht.