Präsenzaufgaben zur Elementare Differentialgeometrie I — SS 07, Serie 6
Dr. M. Simon, S. Krause — 5. Juni 2007

Aufgabe 1 *(Die Mercatorsche Projektion)* Wir konstruieren eine winkeltreue Zylinderprojektion der Sphäre in die Ebene.

(a) Es sei

$$\Psi\colon (t,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta(t)\cos\varphi \\ \cos\theta(t)\sin\varphi \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

Veranschaulichen Sie sich die Abbildung. Wohin werden Breiten- und Längenkreise durch die Umkehrabbildung abgebildet?

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Ersten Fundamentalform $G = D\Psi^T D\Psi$.

(c) Die Konformitätsbedingung

$$G|_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda > 0$$

führt auf eine Differentialgleichung von θ. Stellen Sie diese Differentialgleichung auf.

(d) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen $\theta(0) = 0$ und der Bedingung $\theta' > 0$. *Hilfe:* Sie müssten bei der Integrationsaufgabe $t'(\theta) = \frac{1}{\cos\theta}$ ankommen. Diese lösen sie durch die Umformung

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\sin(\theta + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})\sin(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}\frac{1}{2\cos^2(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$$

Nun führen Sie eine geeignete Substitution durch.

Zusatz: Seekarten werden mittels der Mercatorschen Projektion entworfen. Wie sieht die Bahn eines Schiffes auf einer Seekarte aus, daß konstanten Kurs in einem bestimmten Kompasswinkel eingeschlagen hat? Fährt es auf diese Art die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkten?