

Lösungen der Präsenzaufgaben Serie 6

Aufgabe 1

- (a) Skizze anfertigen
(b) Die Ableitung $D\Psi$ ist

$$D\Psi|_{t,\varphi} = \begin{pmatrix} -\theta'(t) \sin \theta(t) \cos \varphi & -\cos \theta(t) \sin \varphi \\ -\theta'(t) \sin \theta(t) \sin \varphi & \cos \theta(t) \cos \varphi \\ \theta'(t) \cos \theta(t) & 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Matrix der Ersten Fundamentalform G bezüglich der Spalten von $D\Psi$.

$$G = \begin{pmatrix} \theta'(t)^2 & 0 \\ 0 & \cos^2(t) \end{pmatrix}$$

- (c) Aus der Konformität folgt also $\theta'(t)^2 = \cos^2(t)$. Wir setzen $\theta'(t) > 0$ voraus, was auf die Differentialgleichung $\theta'(t) = \cos(t)$ führt.
(d) Trennung der Variablen führt auf die Integrationsaufgabe

$$t = \int_0^t t' dt' = \int_0^\theta \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta$$

Wir lösen das Integral wie folgt auf:

$$\int_0^\theta \frac{1}{\cos \vartheta} d\vartheta = \int_0^\theta (\tan(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}))^{-1} (2 \cos^2(\frac{\vartheta}{2} + \pi/4))^{-1} d\vartheta = \int_1^{\tan(\theta/2 + \pi/4)} u^{-1} du = \log(\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}))$$