Lösungen der Präsenzaufgaben Serie 7

Aufgabe 1

(a) Siehe Blatt, jedoch sollte man welche Koordinatenlinien sind welche? Anzumerken ist, daß der Helikoid die einfachere Parametrisierung $(u, v) \mapsto (t \sin u, t \cos u, u)$ besitzt.

(b) Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} DF_\tau|_{(u,v)} &= \begin{pmatrix} \cos\tau\cos u\sinh v - \sin\tau\sin u\cosh v & \cos\tau\sin u\cosh v + \sin\tau\cos u\sinh v \\ \cos\tau\sin u\sinh v + \sin\tau\sin u\cosh v & -\cos\tau\cos u\cosh v + \sin\tau\sin u\sinh v \\ \cos\tau & \sin\tau \end{pmatrix} \\ &=: \cos\tau A + \sin\tau B \end{aligned}$$

Weiter sind

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix} \\ A^T B &= \begin{pmatrix} 0 & -\cosh^2 v \\ \cosh^2 v & 0 \end{pmatrix} \\ B^T B &= \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix der Ersten Fundamentalform

$$G = \cos^2\tau A^T A + \sin\tau\cos\tau(A^T B + B^T A) + \sin^2\tau B^T B = \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}$$

(c) Man bestimmt die Länge einer Kurve mit der Integralformel

$$\int_a^b \sqrt{g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\, dt$$

Die Länge der Kurve $F_\tau \circ \gamma$ hängt also nur von der Ersten Fundamentalform der Einbettung ab und da diese, wie in b) gezeigt, unabhängig von τ ist, hängt die Länge der Kurve auch nicht von τ ab.