Lösungen der Präsenzaufgaben Serie 9

Aufgabe 1

(a) Die Ableitung von F ist

$$DF = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Wir nennen die Spalten der Ableitung $DF := (\partial_r, \partial_\varphi)$. Die zweiten Ableitungen sind

$$D_{e_1}\partial_r = 0 \qquad D_{e_2}\partial_r = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad D_{e_2}\partial_\varphi = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Wir beschreiben nun die Ableitungen in Termen von ∂_r und ∂_φ. Wenn man es nicht schon auf Anhieb sieht, benutzt man hier die Metrik.

$$D_{e_2}\partial_r = \frac{1}{r}\partial_\varphi$$
$$D_{e_2}\partial_\varphi = -r\partial_r$$

Aus $\partial_r = DFe_1$ und $\partial_\varphi = DFe_2$ folgt unmittelbar

$$\nabla_{e_1}e_1 = 0$$
$$\nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = \frac{1}{r}e_2$$
$$\nabla_{e_2}e_2 = -re_1$$

(b) Die zweiten Ableitungen sind

$$\nabla_{e_1}\nabla_{e_1}\nabla e_2 = -\frac{1}{r^2}e_2 + \frac{1}{r^2}e_2 = 0$$
$$\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 = -e_1$$
$$\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 = -e_1$$

(c) Da die Krümmung der Fläche F verschwindet, muß nach dem Theorema Egregium auch die Seite mit den kovarianten Ableitungen gleich Null sein.