
Aufgabe 1 (*Rektifizierbarkeit*)

Welche Kurven sind rektifizierbar, welche nicht? Beweisen Sie Ihre Behauptung und skizzieren Sie die Kurven.

(a) $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(t) := \begin{cases} (t, t^2 \sin(\frac{1}{t})), & t \in (0, 1] \\ (0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

(b) $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(t) := \begin{cases} (t, t \sin(\frac{1}{t})), & t \in (0, 1] \\ (0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

(c) $c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$c(t) := \begin{cases} (t, t^{\frac{3}{2}} \sin(t), t^{\frac{3}{2}} \cos(t)), & t \in (0, 2\pi] \\ (0, 0, 0), & t = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 2 (C^0 -Abstand)

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (d.h. beschränkt und abgeschlossen) und sei $C^0(K, \mathbb{R}^m)$ die Menge der stetigen Funktionen $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$. Sei $d: C^0(K, \mathbb{R}^m) \times C^0(K, \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ durch $d(f, g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|$ gegeben. Man zeige: d ist wohldefiniert und $(C^0(K, \mathbb{R}^m), d)$ ist ein metrischer Raum. Finden Sie zwei Beispiele, für die d nicht wohldefiniert ist, falls die Abgeschlossenheit bzw. die Beschränktheit von K nicht erfüllt ist.

Aufgabe 3 (*Länge*)

Berechnen sie die Länge der folgenden Kurven (skizzieren sie die Kurve in (a)).

(a) $c: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$c(t) := \begin{cases} (1-t, t) & , t \in [0, 1] \\ (1-t, 2-t) & , t \in (1, 2] \\ (-3+t, 2-t) & , t \in (2, 3] \\ (-3+t, -4+t) & , t \in (3, 4] \end{cases}$$

(b) $c: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$

$$c(t) := (t, \cosh t, t, \cosh t, \dots, t, \cosh t).$$

Aufgabe 4 * (*Isometrien der Sphäre*)

Sei S^n die Sphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$

$$S^n := \{ (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 + (x^{n+1})^2 = 1 \}.$$

und d_S^n der Abstand auf S^n , der vom Standardabstand d auf dem $\mathbb{R}^{n+1}$ induziert wird, also $d_S^n(x, y) := d(x, y)$. Bestimmen Sie die Isometrien von (S^n, d_{S^n}) .

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie den Termin Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 24.04.2007 bis 9:15.