

---

Es sei im Folgenden  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen und  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion.

**Aufgabe 1** (*Asymptotenrichtungen*) Es besitze  $F$  in  $x \in U$  die Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  und die Hauptkrümmungsvektoren  $v_1, v_2$ .

- (a) Diskutieren Sie in den drei Fällen Gaußkrümmung positiv, negativ oder gleich 0 die Existenz und die Richtung von Asymptotenrichtungen.
- (b) Zeigen Sie, dass genau dann die Asymptotenrichtungen senkrecht aufeinander stehen, wenn die mittlere Krümmung verschwindet.

**Aufgabe 2** (*Krümmung eines Graphen*) Bestimmen Sie die Gaußsche und die mittlere Krümmung eines Graphen

$$F: \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}, \quad f \in C^2(U, \mathbb{R})$$

**Aufgabe 3** (*Leibnizregel für die kovariante Ableitung*) Es sei  $\nabla$  die kovariante Ableitung bezüglich  $F$ . Man beweise für  $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$  und  $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ :

$$\nabla_\xi(f\eta) = Df(\xi)\eta + f\nabla_\xi\eta$$

**Aufgabe 4** (*Kovariante Ableitung einer Rotationsfläche*) Man bestimme die Christoffelsymbole einer Rotationsfläche (s.Serie 9, Aufgabe 3).

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 3.7.2007 bis 9:15.*