Aufgabe 1 *(Flächengleichungen)* Sei $F \in C^3(U, \mathbb{R}^3)$. Man führe die Gleichungen

$$\partial_\alpha B^i_{\beta k} - \partial_\beta B^i_{\alpha k} + \sum_{j=1}^{3} B^i_{\alpha j} B^j_{\beta k} - B^i_{\beta j} B^j_{\alpha k} = 0,$$

wobei $\alpha, \beta \in \{1, 2\}$, $i, k \in \{1, 2, 3\}$, auf die Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi zurück.

Aufgabe 2 *(Ableitung der Komponenten der Metrik)* Es seien $(g_{\alpha\beta})$ die Komponenten der Ersten Fundamentalform einer Fläche. Zeigen Sie, dass

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \sum_{\lambda=1}^{2} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} + \Gamma^\lambda_{\alpha\gamma} g_{\lambda\beta}.$$

Aufgabe 3 *(Ableitungen einer Variation)* Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3), f \in C^2(I \times J, U)$. Dann gilt:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \frac{\nabla}{d\epsilon} \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Hier ist $\frac{\partial f}{\partial \epsilon}$ als Vektorfeld längs der Kurve $f_\epsilon : I \to \mathbb{R}^2$ zu verstehen, und $\frac{\partial f}{\partial t}$ als Vektorfeld längs der Kurve $f_t : I \to \mathbb{R}^2$, mit $f_\epsilon(t) := f(t, \epsilon) =: f_t(\epsilon)$.

Aufgabe 4 *(Kürzeste und Geodätische)* Es sei $F : \mathbb{R}2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(s, t) = (s, \cos t, \sin t)$. Ferner sei

$$\begin{aligned} \gamma \colon [0, \tfrac{3\pi}{2}] &\to \mathbb{R}^2 \\ \gamma(t) &= (0, t). \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Man zeige, dass γ eine Geodätische ist.

(b) Man zeige, dass $F \circ \gamma$ *keine* sogenannte *Kürzeste* ist.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 10.7.2007 bis 9:15.