

Aufgabe 1 (*Kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten*)

Sei $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ $c(t) := (1 - t)p + tq$

- (i) Zeigen Sie, dass $L(\tilde{c}) \geq L(c)$ für alle parametrisierten Kurven $\tilde{c} \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ mit $\tilde{c}(a) = p, \tilde{c}(b) = q$ ($a, b \in \mathbb{R}$ beliebig).
- (ii) Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha \in C^0([a, b], \mathbb{R}^n)$ $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$. Zeigen Sie: Falls $L(c) = L(\alpha)$ dann gilt $\alpha(t) = (1 - \phi(t))p + \phi(t)q$, wobei $\phi : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ monoton und stetig ist

Aufgabe 2 (*Krümmung*) Sei $c : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3$ $c(t) := (t, t, e^t)$

- (a) Skizzieren Sie die Kurve
- (b) Sei $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge Parametrisierung von c , wobei $I = [0, l]$. Berechnen Sie die Krümmung von $\tilde{c}$ in dem Punkt 0.

Aufgabe 3 (*Definition von $C^1([0, 1], \mathbb{R})$*)

- (i) Sei $c \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Sei $m := \lim_{t \searrow 0} c'(t)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{t \searrow 0} \frac{c(t) - c(0)}{t}$ existiert und gleich m ist.
 - ([ii]) Konstruieren Sie eine Kurve $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit
 - (a) $\alpha \in C^1((0, 1), \mathbb{R}) \cap C^0([0, 1], \mathbb{R})$,
 - (b) $\lim_{t \searrow 0} \frac{c(t) - c(0)}{t}$ existiert,
 - (c) $\alpha \notin C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Aufgabe 4 (*Parametrisierung als Graph*)

- (i) Sei $c \in C^1([-1, 1], \mathbb{R}^2)$ $c(t) = (x(t), y(t))$ mit $x(0) = 0$ und $x'(0) \neq 0$. Zeigen Sie: es existiert ein $\epsilon > 0$ und einen Diffeomorphismus $\phi : I \rightarrow (-\epsilon, +\epsilon)$ so dass $c \circ \phi(t) = (t, (y \circ \phi)(t))$.
- (ii) Sei $\beta \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ mit $\beta(t) = (t, y(t))$ für eine Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass β regulär ist, und berechnen Sie die Krümmung $k(t)$ als Funktion von y, y', y'' .

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, 29.05.2007 bis 9:15.