

Aufgabe 1 (*Hauptsatz für ebene Kurven*)

Sei $k : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $k(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Bestimmen Sie eine C^∞ -Kurve (mit Nachweis) $c : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, mit $\kappa(t) = k(t)$, wobei κ die Krümmung der Kurve c ist.

Aufgabe 2 (*Skalierung einer Kurve*)

Sei $\alpha \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenet-Kurve und sei $r > 0$.

- (a) Zeigen Sie: $\tilde{\alpha}(s) := r\alpha(\frac{s}{r})$ ist nach der Bogenlänge parametrisiert.
- (b) Sei $\tilde{\alpha}$ wie in (a). Wie hängen Krümmung und Torsion von α mit der Krümmung und Torsion von $\tilde{\alpha}$ zusammen?
- (c) Sei $r > 0$, $\tilde{I} = rI$ und $\beta \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$, $\tilde{\beta} \in C^3(\tilde{I}, \mathbb{R}^3)$ beide nach der Bogenlänge parametrisiert. Für alle $s \in \tilde{I}$ gelte: $\beta''(s) \neq 0$, $\tilde{\beta}''(s) \neq 0$, $\tilde{\kappa}(s) = \frac{1}{r}\kappa(\frac{s}{r})$, $\tilde{\tau}(s) = \frac{1}{r}\tau(\frac{s}{r})$, wobei κ, τ die Krümmung, Torsion von β sind, und $\tilde{\kappa}, \tilde{\tau}$ Krümmung und Torsion von $\tilde{\beta}$ sind. Zeigen Sie: Es existiert eine orientierungserhaltende Isometrie $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, so dass $r\beta(\frac{s}{r}) = F(\tilde{\beta}(s))$ für alle $s \in \tilde{I}$.

Aufgabe 3 (*Maxima*)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^2 -Kurve, so dass $|\alpha(t)|$ an der Stelle $t_0 \in I$ ein lokales Maximum hat. Zeigen Sie: $\kappa(t_0) \geq |\frac{1}{\alpha(t_0)}|$, wobei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ die Krümmung von α ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 8.05.2003 bis 9:15.