
Aufgabe 1 (*Gleichungen*)

Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$. Beweisen Sie:

- (a) $(\frac{c'}{|c'|})' = \kappa N|c'|$, wobei κ, N wie in der Vorlesung für eine C^2 Kurve definiert sind (siehe Defn. 2.15, und Lemma 2.17).
- (b) Falls $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine Frenetkurve ist, so gilt:

$$\tau = \frac{\det(c', c'', c''')}{|c'|^2 |c'' - \langle c'', T \rangle T|^2}.$$

Aufgabe 2 (*Bewegungsinvarianz von Krümmung und Torsion*)

Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Kurve und $F(x) = Sx + a$ eine Euklidische Bewegung. Dann ist $\tilde{c} = F \circ c$ ebenfalls regulär und es gilt mit $\det(S) = \pm 1$

- (1) $\tilde{\kappa} = \kappa$.
- (2) $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B} = ST, SN, \pm SB$.
- (3) $\tilde{\tau} = \pm \tau$.

Aufgabe 3 (*Hauptsatz für ebene Kurven II*)

Beweisen Sie, dass es zu $k \in C^0(I, \mathbb{R})$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ gibt mit Krümmung $\kappa = k$. Zeigen Sie weiter: Sind c_1, c_2 zwei solche Kurven, dann gilt $c_2 = F \circ c_1$ für eine orientierungserhaltende Bewegung F .
Hinweis: Machen Sie für $\gamma' = \tau$ den Ansatz $\tau(s) = \exp(i\phi(s))$.

Aufgabe 4 (*Umlaufzahl*)

Sei $c_1 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Parabel $c_1(t) = (t, 1-t^2)$. Sei $c_2 : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(1, 0)$ bis $(\frac{1}{2}, -1)$, $c_3 : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(\frac{1}{2}, -1)$ bis $(-\frac{1}{2}, 0)$, $c_5 : [4, 5] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(\frac{1}{2}, 0)$ bis $(-\frac{1}{2}, -1)$, $c_6 : [5, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Gerade von $(-\frac{1}{2}, -1)$ bis $(-1, 0)$ wobei die Parametrisierung so gewählt ist, dass $c_2(1) = (1, 0), c_2(2) = (\frac{1}{2}, -1)$, usw., und so dass $|c'_2|, |c'_3|, |c'_5|, |c'_6|$ alle konstant sind. Sei $c_4 : [3, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine C^∞ reguläre parametrisierte Kurve, die auf dem oberen Halbkreis vom Radius $\frac{1}{2}$ und Mittelpunkt $(0, 0)$ liegt, so dass $c_4(3) = (-\frac{1}{2}, 0)$, $c_4(4) = (\frac{1}{2}, 0)$, wobei die Parametrisierung so gewählt ist, dass $|c'_4|$ konstant ist. Sei $c : [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}^2$ die parametrisierte Kurve mit $c|_{[-1,1]} = c_1$, $c|_{[1,2]} = c_2$, $c|_{[2,3]} = c_3$, $c|_{[3,4]} = c_4$, $c|_{[4,5]} = c_5$, $c|_{[5,6]} = c_6$.

- (a) Skizzieren Sie c und geben Sie explizit die Parametrisierung von c an.
- (b) Bestimmen Sie eine stetige Funktion $\theta : [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $r : [-1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ so dass $c(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t))$.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 15.05.2003 bis 9:15.