Aufgabe 1 *(Krümmung ebener Kurven)*
Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ eine reguläre Kurve und $\tilde{c} \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ die Kurve $\tilde{c}(t) := (c(t), 0)$.
Zeigen Sie:

1. $\kappa_{\tilde{c}}(t) = |\kappa_c(t)|$ wobei κ_c die orientierte Krümmung der Kurve c ist, und $\kappa_{\tilde{c}}$ die Krümmung der Raumkurve $\tilde{c}$ ist.
2. falls $c \in C^3(I, \mathbb{R}^2)$ ist und $\kappa_c \neq 0$ dann gilt $\tau_{\tilde{c}} \equiv 0$.
3. falls $\kappa_c \neq 0$ gilt $N = \pm\nu$. Wann ist $N = \nu$ wann ist $N = -\nu$?
4. falls $\kappa_c \neq 0$ gilt $B = \pm e_3$. Wann ist $B = e_3$ wann ist $B = -e_3$?

Aufgabe 2 *(Änderung der orienierten Krümmung durch eine Bewegung)*
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(z) = Sz + a$, mit $S \in O(2), a \in \mathbb{R}^2$, und $c : I \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann folgt für $\tilde{c} = F \circ c$, $\tilde{\nu} = \pm S\nu$, und $\tilde{\kappa} = \pm\kappa$, wobei $\det(S) = \pm 1$.
Aufgabe 3 *(Frenet-Rahmen für ebene Kurven)*
Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann gelten für $T = c'$ $T' = \kappa\nu, \nu' = -\kappa T$.
Aufgabe 4 *(Großkreisbogen)*
Bei dem Teil über die "Gleichheit" im Lemma 2.21 wurde benutzt, dass $L(\gamma|_{[r,p]}) > L(\tilde{\gamma}_{[r,s]})$, wobei $\tilde{\gamma}(t) = (\sqrt{1-t^2}x, t)$, für ein $x \in S^1$, für alle $t \in [r, s]$ (Großkreisbogen) und γ stückweise C^1 mit $\gamma(r) = (\sqrt{1-r^2}x, r)$ und $\gamma(p) = (\sqrt{1-s^2}y, s)$ für ein $y \in S^1$, wobei $y \neq x$.
Beweisen Sie diese Tatsache.
Hinweis: Benutzen Sie die Abschätzung der Aussage von Lemma 2.21 (welche schon bewiesen worden ist).
Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, 22.05.2007 bis 9:15.