
Aufgabe 1*(Zum Rotationsindex I)*
Berechnen Sie den Rotationsindex der folgenden Kurven $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

(a) $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$

(b) $\gamma(t) = (\cos(-t), \sin t)$

(c) $\gamma(t) = \frac{i}{2} + (1 - 2\sin t)e^{it}$

Aufgabe 2*(Zum Rotationsindex II)*
Sei c die Kurve von Aufgabe 4, Serie 4 Berechnen Sie den Rotationsindex der Kurve c aus Aufgabe 4, Serie 4.

Aufgabe 3*(Fundamentalsatz der Algebra)*
Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k$ mit $k \geq 1$ und $a_k \neq 0$ hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle. Betrachten Sie zum Beweis die Kurven $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \gamma_r(t) = p(re^{it})$, wobei $r \geq 0$ und o.B.d.A. $a_0 \neq 0$ und zeigen Sie:

(a) Für $r \gg 1$ ist $\eta(\gamma_r, 0) = k$.

(b) $\eta(\gamma_0, 0) = 0$

Argumentieren Sie nun durch Widerspruch.

Aufgabe 4*(Innere und äußere Normale)*
Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine einfache C^1-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U und Normale $\nu = Jc'$. Zeigen Sie, dass es zu $s \in I$ ein $\rho(s) > 0$ gibt, so dass genau eine der folgenden Alternativen gibt:

$$c(s) + \rho\nu(s) \in U \quad \forall \rho \in (0, \rho(s)) \quad \text{(innere Normale)}$$
$$c(s) - \rho\nu(s) \in U \quad \forall \rho \in (0, \rho(s)) \quad \text{(äußere Normale)}$$

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 05.06.2007 bis 9:15.