Im Folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen.

Aufgabe 1 *(Kurven und Winkel auf Flächen)* Es sei $F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ eine Immersion und G die Matrix der Ersten Fundamentalform von F.

(a) Zeigen Sie, dass für jede Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ gilt

$$L(F \circ \gamma) = \int_I \sqrt{g(\gamma(t))(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}\, dt$$

(b) Zeigen Sie außerdem, dass für $x \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\cos \measuredangle(DF|_x v, DF|_x w) = \frac{g(x)(v, w)}{\sqrt{g(x)(v, v) g(x)(w, w)}}$$

Aufgabe 2 *(Der Zylinder)* Die Fläche $Z = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = R > 0\}$ wird bekanntlich als Zylinder bezeichnet. Finden Sie eine längentreue Parametrisierung der Zylinderfläche $Z \backslash \{(x, y, z) \mid y = -1\}$.

Aufgabe 3 *(Der Kegel)* Es sei $F \colon U \to \mathbb{R}^3$ mit $U = B_R(0) \backslash \{0\}$ und

$$F(x) = (x, c|x|), \qquad x \in U$$

Berechnen Sie die Matrix der Ersten Fundamentalform von F und den Flächeninhalt $\mathrm{vol}(F|_U)$.

Aufgabe 4 *(Tschebyscheffsche Netze)* Es sei die parametrisierte Fläche $F \in C^2(U, \mathbb{R}^2)$ gegeben. Man definiere für $y \in U$ die Kurve $\gamma_y \colon t \mapsto (t, y)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle Intervalle $[a, b] \subset I$ ist die Funktion $y \mapsto L(F \circ \gamma_y|_{[a,b]})$ konstant.

(ii) Es gilt für die Komponente der Ersten Fundamentalform $\partial_2 g_{11} = 0$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Dienstag, den 19.06.2007 bis 9:15.