Aufgabe 1 (*Rektifizierbarkeit*)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Kurven $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ rektifizierbar sind.

$$a) \quad c(t) = \begin{cases} (t^2, t^2) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\dfrac{1-t}{2}, \dfrac{1-t}{2}\right) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1. \end{cases}$$

$$b) \quad c(t) = \begin{cases} \left(t, t^2 \sin \dfrac{1}{t}\right) & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ (0,0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

$$c) \quad c(t) = \begin{cases} \left(t, t \sin \dfrac{1}{t}\right) & \text{für } 0 < t \leq 1, \\ (0,0) & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen sie für *b*) dass $c'(t)$ Beschränkt ist.

Aufgabe 2
Betrachten Sie eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve (*Archimedische Spirale*)

$$c_1(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t)), \quad t \in I = [a,b],$$

wobei $r \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$, und $\varphi \in C^1(I)$ and eine kurve $c_2 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$,

$$c_2(t) = (t, \cosh(t)), \quad t \in I = [a,b],$$

a) Berechnen Sie die Länge von c_1. Spezialisieren Sie auf $r(t) = \varphi(t) = t$, und fertigen Sie eine Zeichnung an.

b) Finden sie eine nach der Bogenlänge Umparametrisierung von c_2.

Aufgabe 3 (*C^k-Regularität der Umparametrisierung*)
Seien $c_{1,2} : I_{1,2} \to \mathbb{R}^n$ reguläre C^k-Kurven für ein $k \geq 1$. Zeigen Sie: ist $c_2 = c_1 \circ \varphi$ mit $\varphi : I_2 \to I_1$ stetig, so ist schon $\varphi \in C^k$.
Hinweis: Betrachten sie die reelle C^k Funktion

$$g : I_2 \to \mathbb{R}, \quad g(t) = \langle c_2(t), e \rangle.$$

Aufgabe 4 (*Unterhalbstetigkeit der Bogenlänge*)
Konvergiert eine Folge $c_k \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ punktweise gegen $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$, so folgt

$$L(c) \leq \liminf_{k \to \infty} L(c_k).$$

Abgabe Dienstag, 24. April 2018