In diesen Aufgaben soll die Frenet-Theorie für Kurven erarbeitet werden. Wenn Sie die Definitionen kennen, gibt es 16 Punkte. Choose your favorite Space curve and use it to give an example of each definition.

Definition 1 *Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ regulär. Ein System von Funktionen $v_i \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ für $i = 1, \ldots, n$ heißt begleitendes n-Bein längs c, falls gilt:*

$$v_1 = \frac{c'}{|c'|} \quad \text{und} \quad \langle v_i(t), v_j(t) \rangle = \delta_{ij} \text{ für alle } t \in I.$$

Lemma 1 *Für $v_1, \ldots, v_n \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ und $t_0 \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ *für* $1 \leq i, j \leq n$.

(2) *Es gibt Funktionen $a_{ij} \in C^0(I)$ mit $a_{ji} = -a_{ij}$, so dass gilt:*

$$v_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \quad \text{und} \quad \langle v_i(t_0), v_j(t_0) \rangle = \delta_{ij}.$$

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2): Da $v_1, \ldots, v_n$ Orthonormalbasis, gilt $v_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j$ mit $a_{ij} = \langle v_i', v_j \rangle$, und es folgt

$$a_{ji} = \langle v_j', v_i \rangle = \underbrace{\langle v_j, v_i \rangle'}_{=0} - \langle v_j, v_i' \rangle = -a_{ij}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Für die Funktionen $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ gilt $g_{ij}(t_0) = \delta_{ij}$ und

$$g_{ij}' = \langle v_i', v_j \rangle + \langle v_i, v_j' \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k, v_j \rangle + \langle v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \langle v_j, v_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \langle v_i, v_k \rangle,$$

das heißt

$$g_{ij}' = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} g_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} g_{ik}.$$

Die g_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ sind damit Lösungen eines linearen, homogenen System von n^2 Differentialgleichungen erster Ordnung. Dieses Differentialgleichungssystem wird aber auch durch die konstanten Funktionen δ_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, gelöst:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{jk} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \delta_{ik} = a_{ij} + a_{ji} = 0 = \delta_{ij}'.$$

Aus der eindeutigen Lösbarkeit des Anfangswertproblems folgt $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$. $\square$

Definition 2 *Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ heißt Frenetkurve, falls $\varkappa(s) \neq 0$ für alle $s \in I$. Das Frenet-Dreibein T, N, B von c ist*

$$\begin{aligned} T &= c' \quad \textit{(Tangentenvektor)} \\ N &= \frac{c''}{|c''|} \quad \textit{(Hauptnormalenvektor)} \\ B &= T \times N \quad \textit{(Binormalenvektor)} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $\times$ das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$.

Definition 3 *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve. Die Torsion von c ist die Funktion*

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle,$$

wobei T, N, B das Frenet-Dreibein von c ist.

Beispiel 1 Für die Schraubenlinie ist

$$\tau(s) = \frac{a}{r^2 + a^2}.$$

Lemma 2 (Frenetgleichungen) *Sei $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Frenetkurve mit Frenet-Dreibein T, N, B. Dann gilt*

$$\begin{array}{rcrcrcr} T' &=& 0 &+& \varkappa N &+& 0 \\ N' &=& -\varkappa T &+& 0 &+& \tau B \\ B' &=& 0 &-& \tau N &+& 0 \end{array}$$

Beweis: Wegen $T = c'$ und $\varkappa = |c''|$ ist $T' = c'' = \varkappa N$, und $\tau = \langle N', B \rangle$ gilt nach Definition 3. Da die Matrix schiefsymmetrisch sein muss, sind alle Matrixelemente bestimmt. □

Satz 1 *Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisiert.*

(1) *Ist $\varkappa = 0$, so liegt $c(I)$ in einer Geraden.*

(2) *Ist $c \in C^3$ Frenetkurve und $\tau = 0$, so liegt c in einer Ebene.*

Beweis: Ist $\varkappa = 0$, so folgt $c'' = 0$ und somit $c(s) = p + sv$ mit $p, v \in \mathbb{R}^3$, womit (1) gezeigt ist. Unter der Annahme (2) folgt aus den Frenetgleichungen $B' = 0$, also $B(s) \equiv b$ für ein $b \in \mathbb{R}^3$ mit $|b| = 1$. Weiter gilt dann $\langle c, b \rangle' = \langle c', b \rangle \equiv 0$, da $c' = T \perp B$, und hieraus $\langle c, b \rangle = a$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Damit verläuft c in der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, b \rangle = a\}$. □

Satz 2 (Hauptsatz für Raumkurven) *Seien $k \in C^1(I), k > 0,$ und $\omega \in C^0(I)$ gegebene Funktionen. Dann gibt es eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$ mit Krümmung $\varkappa = k$ und Torsion $\tau = \omega$. Die Kurve c ist eindeutig bestimmt bis auf Anwendung einer orientierungserhaltenden Euklidischen Bewegung.*

BEWEIS: Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Seien $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ zwei solche Kurven, mit zugehörigen Frenetbeinen $\{T, N, B\}$ bzw. $\{\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}\}$. Da die Frenet-Dreibeine positiv orientiert sind, gilt nach einer eigentlichen Bewegung für ein $s_0 \in I$

$$c(s_0) = \tilde{c}(s_0) \quad \text{und} \quad T(s_0), N(s_0), B(s_0) = \tilde{T}(s_0), \tilde{N}(s_0), \tilde{B}(s_0).$$

Sowohl T, N, B als auch $\tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ erfüllen die Frenetgleichungen mit den Koeffizienten $\varkappa = k$ und $\tau = \omega$. Aus der eindeutigen Lösbarkeit der Anfangswertproblems folgt $T, N, B = \tilde{T}, \tilde{N}, \tilde{B}$ und hieraus $c = \tilde{c}$ wegen $c' = T$ bzw. $\tilde{c}' = \tilde{T}$.

Sei nun T, N, B eine C^1-Lösung des Frenetsystems mit Koeffizienten $\varkappa = k$ und $\tau = \omega$ zu den Anfangswerten $T(s_0), N(s_0), B(s_0) = e_1, e_2, e_3$. Eine solche Lösung liefert der generelle Existenzsatz für Anfangswertprobleme für gewöhnliche Differentialgleichungen (Stichwort: Picard-Lindelöf). Da die Koeffizientenmatrix in den Frenetgleichungen schiefsymmetrisch ist, ist T, N, B orthonormal für alle $s \in I$. Definiere

$$c \in C^2(I, \mathbb{R}^3),\ c(s) = \int_{s_0}^{s} T(s')\, ds'.$$

Wegen $c' = T$ ist c nach der Bogenlänge parametrisiert und es gilt $c'' = T' = kN$. Also ist N die Hauptnormale sowie $k > 0$ die Krümmung von c. Da $k \in C^1$ nach Voraussetzung und $N \in C^1$, folgt weiter $c \in C^3(I, \mathbb{R}^3)$. Nun ist die Orthonormalbasis T, N, B an der Stelle s_0 positiv orientiert und $\det(T, N, B)$ hängt stetig von s ab, also ist B der Binormalenvektor der Kurve c und es folgt $\tau = \langle N', B \rangle = \omega$. $\square$

Abgabe Dienstag, 3. Juli 2018