Aufgabe 1 (*Rotationsflächen mit K konstant*)
Sei $c(s) = (r(s), 0, z(s))$, $s \in I$, nach der Bogenlänge parametrisiert und $r(s) > 0$. Die von $c(s)$ erzeugte Rotationsfläche ist

$$F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ F(s, \varphi) = (r(s) \cos\varphi, r(s) \sin\varphi, z(s)).$$

Bestimmen Sie alle solchen Flächen mit Gaußkrümmung $K \in \{1, 0, -1\}$. Skizzieren Sie Beispiele.

Aufgabe 2 (*Tangentenflächen*)
Sei $\gamma \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann heißt $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(s, t) = \gamma(s) + t\gamma'(s)$, Tangentenfläche.

(1) Berechnen Sie die erste Fundamentalform und geben Sie eine Bedingung an, damit F für $t \neq 0$ regulär ist.

(2) Sei nun γ eine Frenetkurve. Berechnen Sie die zweite Fundamentalform, die Weingartenabbildung und deren Eigenwerte und Eigenvektoren.

Aufgabe 3 (*Kurven auf Flächen: Satz von Meusnier*)
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ reguläre C^2-Fläche mit Normale N, erster und zweiter Fundamentalform g bzw. h. Sei $c = F \circ \gamma$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie (an der Stelle $s = 0$)

(1) $\langle c'', N \circ \gamma \rangle = h(\gamma', \gamma')$.

(2) Ist $\varkappa = 0$, so folgt $h(\gamma', \gamma') = 0$.

(3) Ist $\varkappa > 0$ und $\nu = c''$, so folgt $\varkappa \langle \nu, N \circ \gamma \rangle = h(\gamma', \gamma')$.

Aufgabe 4 (*Konvexe Hülleneigenschaft*)
Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $F \in C^0(\overline{U}, \mathbb{R}^3)$, so dass $F|_U$ reguläre Fläche mit Gaußscher Krümmung $K \leq 0$ ist. Zeigen Sie, dass $F(\overline{U})$ in der konvexen Hülle von $F(\partial U)$ enthalten ist. Verwenden Sie dazu

$$\operatorname{conv}(F(\partial U)) = \bigcap_{F(\partial U) \subset B_R(p)} B_R(p).$$

Abgabe Dienstag, 9. Juli 2018