Aufgabe 1 (*Assoziierte Familie von Minimalfächen*)
Betrachten Sie für $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ folgende Schar von Flächen:

$$F_\alpha(u,v) = \begin{pmatrix} \sin\alpha\ \cosh u \cos v + \cos\alpha\ \sinh u \sin v \\ \sin\alpha\ \cosh u \sin v - \cos\alpha\ \sinh u \cos v \\ \sin\alpha\, u + \cos\alpha\, v \end{pmatrix}.$$

(a) F_0 ist das Helikoid, $F_{\pi/2}$ das Katenoid.

(b) Alle F_α haben dieselbe erste Fundamentalform.

(c) Alle F_α sind Minimalflächen.

Aufgabe 2 (*Eigenschaften der kovarianten Ableitung I*)
Für $\xi, \eta \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in C^1(U)$ erfüllt die kovariante Ableitung folgende Rechenregeln:

(1) $\nabla_{\varphi\xi}\eta = \varphi\nabla_\xi\eta$.

(2) $\nabla_\xi(\varphi\eta) = \varphi\nabla_\xi\eta + (\partial_\xi\varphi)\eta$.

(3) $\nabla_\xi\eta - \nabla_\eta\xi = [\xi, \eta]$.

Aufgabe 3 (*Eigenschaften der kovarianten Ableitung II*)
Für $\xi, \eta \in C^1(I, \mathbb{R}^2)$ und $\varphi \in C^1(I)$ erfüllt die kovariante Ableitung längs $c : I \to U$ bzgl. g folgende Rechenregeln:

(1) $\dfrac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda\dfrac{\nabla\xi}{dt} + \mu\dfrac{\nabla\eta}{dt}$.

(2) $\dfrac{\nabla(\varphi\xi)}{dt} = \varphi\dfrac{\nabla\xi}{dt} + \varphi'\xi$.

(3) $g(\xi, \eta)' = g\Big(\dfrac{\nabla\xi}{dt}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \dfrac{\nabla\eta}{dt}\Big)$.

Aufgabe 4 (*günstige Koordinaten*)
Sei (h_{ij}) Riemannsche Metrik nahe beim Nullpunkt im $\mathbb{R}^n$, mit $h_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Bestimmen Sie einen lokalen Diffeomorphismus der Form

$$\phi(x) = x + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{n} C_{ij}^k x^i x^j e_k \quad \text{mit } C_{ij}^k = C_{ji}^k,$$

so dass für die Pullback-Metrik $g = \phi^* h$ gilt:

$$g_{ij}(0) = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad \partial_i g_{jk}(0) = 0 \quad \text{für alle } i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Hinweis: Die Bedingung $h_{ij}(0) = \delta_{ij}$ lässt sich immer arrangieren, und zwar wie?
Anmerkung (Pullback-Metrik in Koordinaten): $g_{ij} = (h \circ \phi)(\partial_i \phi, \partial_j \phi)$

Abgabe Dienstag, 16. Juli 2018