
Aufgabe 1 (*Astroide*)
Auf einem Kreis mit Radius vier rollt innen ein Kreis mit Radius eins ab. Die Kurve c, die dabei ein fester Punkt auf dem kleineren Kreis beschreibt, heißt Astroide. Bestimmen Sie eine Parametrisierung der Astroide, oBdA mit $c(0) = (4,0)$. Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die Bogenlängenfunktion der Astroide.

Aufgabe 2 (*Strecken sind kürzeste Verbindungen*)
Seien $p, q \in \mathbb{R}^n$ und $c : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $c(t) = (1-t)p + tq$. Zeigen Sie:

(1) Für jede stückweise C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ gilt

$$L(\gamma) \geq L(c) = |p - q|.$$

(2) Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\gamma = c \circ \varphi$ für eine nichtfallende Funktion $\varphi : [a,b] \to [0,1]$ mit $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 1$.

Aufgabe 3 (*Differentiation von bilinearen Abbildungen*)
Seien U, V, W endlich-dimensionale Vektorräume, $B : U \times V \to W$ eine bilineare Abbildung und $I = (a,b)$. Zeigen Sie: mit $x \in C^1(I,U)$, $y \in C^1(I,V)$ ist auch $B(x,y) \in C^1(I,W)$, und es gilt die Produktregel

$$B(x,y)' = B(x',y) + B(x,y').$$

Hinweis. Verwenden Sie Koordinatendarstellungen bzgl. Basen von U, V, W.

Aufgabe 4 (*Elastische Energie von Kurven*)
Sei $c : [0,L] \to \mathbb{R}^n$ eine C^2-geschlossene Kurve. Zeigen Sie

$$E(c) := \int_0^L \kappa^2 \, ds \geq \frac{4\pi^2}{L},$$

und diskutieren Sie den Gleichheitsfall.

Hinweis. Machen Sie im Fall $L = 2\pi$ einen Fourierreihenansatz, für $a_k,\, b_k \in \mathbb{R}^n$,

$$c'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos ks + b_k \sin ks\big).$$

Montag Abend, 30. April 2018