
Important remark!
Due to the high number of students following the exercises classes for this subject, we have opened a new exercises group. The registration needs to be done again. Please do it online (HisInOne) over this week. The registration period is 29 April- 3 May.

Aufgabe 1 (*Maxima der Krümmung*)
Sei $c : I = (a, b) \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre C^2-Kurve, und $|c(t)|$ habe in $t_0 \in I$ ein lokales Maximum. Zeigen Sie

$$\varkappa(t_0) \geq \frac{1}{|c(t_0)|}.$$

Aufgabe 2 (*Umparametrisierung als Graph*)
Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $I = (a, b)$, eine reguläre Kurve. Es sei $\langle c'(t_0), e_1 \rangle \neq 0$. Bestimmen Sie eine C^1-Umparametrisierung

$$\varphi : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \quad \text{wobei } x_0 = \langle c(t_0), e_1 \rangle,$$

so dass $(c \circ \varphi)(x) = (x, u(x))$ für eine Funktion $u : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^{n-1}$.

Aufgabe 3 (*Hauptsatz für ebene Kurven*)
Beweisen Sie, dass es zu $k \in C^0(I)$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ gibt mit Krümmung $\varkappa = k$ bezüglich $\nu = Jc'$. Zeigen Sie weiter: sind $c_{1,2}$ zwei solche Kurven, dann gilt $c_2 = F \circ c_1$ für eine orientierungserhaltende Bewegung F.
Hinweis. Machen Sie für $\tau = c'$ den Ansatz $\tau(s) = e^{i\theta(s)}$.

Aufgabe 4 (*Invarianz der Umlaufzahl bei Umparametrisierungen*)
Ist $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$ eine richtungstreue (bzw. richtungsumkehrende) Umparametrisierung, so gilt $n(\tilde{\gamma}, 0) = \pm n(\gamma, 0)$, mit

$$n(c, 0) := \frac{1}{2\pi} \int_a^b \left\langle \frac{Jc}{|c|^2}, c' \right\rangle dt \in \mathbb{Z}.$$

Abgabe Dienstag, 8. April 2018