Aufgabe 1 (*Zum Rotationsindex*)
Berechnen Sie $\mathrm{ind}(\gamma) := n(\gamma', 0)$ für folgende Kurven $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$.

(1) $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$

(2) $\gamma(t) = i/2 + (1 - 2\sin t)e^{it}$

Aufgabe 2 (*Fundamentalsatz der Algebra*)
Zeigen Sie durch Widerspruch, dass jedes komplexe Polynom

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0 \quad \text{mit } n \geq 1$$

eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Betrachten Sie dazu die Umlaufszahl von $c_R(t) = P(Re^{it})$ bezüglich des Nullpunkts, und finden Sie geeignete Homotopien.

Aufgabe 3 (*Homotopieklassen*)
Zeigen Sie, das zwei geschlossene, stückweise C^1-Kurven $\gamma_{0,1} : I = [a, b] \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ genau dann in $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig homotop sind, wenn $n(\gamma_0, 0) = n(\gamma_1, 0)$.

Aufgabe 4 (C^0-*Homotopieinvarianz*)
Zeigen Sie, sei $c : [0, 1] \times I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ stetig. Die Kurven $c(s, \cdot)$ seien geschlossen. Dann ist $s \mapsto n(c(s, \cdot))$ konstant.

Abgabe Dienstag, 15. Mai 2018