Aufgabe 1 (*Innere und äußere Normale*)
Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine einfach C^1-geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Innengebiet U und Normale $\nu = Jc'$. Zeigen Sie dass es ein $\varrho(s) > 0$ gibt, so dass genau eine der folgenden Alternativen gilt:

$$\begin{aligned} &c(s) + r\nu(s) \in U \quad \text{für alle } s \in I,\ r \in (0, \varrho(s)), \quad \text{(innere Normale)},\\ &c(s) - r\nu(s) \in U \quad \text{für alle } s \in I,\ r \in (0, \varrho(s)) \quad \text{(äußere Normale)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (*Stützhyperebenen für konvexe Mengen*)
Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Zeigen Sie, dass zu jedem $p \in \partial K$ ein $\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $|\nu| = 1$ existiert, so dass

$$K \subset H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - p, \nu \rangle \geq 0\}.$$

Aufgabe 3 (*Parallelkurven*)
Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ nach der Bogenlänge parametrisiert und C^2-geschlossen, mit Index $k \in \mathbb{Z}$. Sei $\varkappa$ die Krümmung bezüglich der Normalen $\nu = J\gamma'$. Wir betrachten für $\varrho < 1/\max \varkappa_+$ die Abbildung

$$f : [0, \varrho] \times [0, L] \to \mathbb{R}^2,\ f(r, s) = \gamma(s) + r\nu(s).$$

(a) Die Parallelkurve $f(r, \cdot)$ hat $\varkappa_r = \varkappa/(1 - r\varkappa)$ und $L_r = L - 2\pi k r$.

(b) Der von f überstrichene Flächeninhalt ist $A_\varrho = L\varrho - \pi k \varrho^2$.

Aufgabe 4 (*Normalenparametrisierung*)
Sei $c \in C^2(I, \mathbb{R}^2)$ nach der Bogenlänge parametrisiert, mit Einheitsnormale $\nu : I \to \mathbb{S}^1$. Zeigen Sie: ist $\varkappa > 0$ auf I, so existiert eine Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \varphi$ mit $\varphi \in C^1(J, I)$, so dass für $\tilde{\nu} = \nu \circ \varphi$ gilt:

$$\tilde{\nu}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \quad \text{für alle } \theta \in [0, 2\pi].$$

Abgabe Dienstag, 29. Mai 2018