Aufgabe 1 (*Konvexe Kurven I*)
Zeigen Sie Lemma 5.2 aus dem Vorlesungsskript.

Aufgabe 2 (*Rotationsindex für stückweise C^1-Kurven*)
Sei $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ eine einfach geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte stückweise C^1-Kurve, das heißt es gibt eine Unterteilung $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = L$ mit $\gamma|_{[s_{i-1},s_i]} \in C^1$. Für die orientierten Außenwinkel sei vorausgesetzt, dass

$$\alpha_i := \angle(\gamma'_-(s_i), \gamma'_+(s_i)) \in (-\pi, \pi) \quad \text{für } i = 1, \ldots, N, \text{ wobei } \gamma'_+(L) := \gamma'_+(0).$$

Zeigen Sie folgende Verallgemeinerung des Umlaufsatzes:

$$\operatorname{ind}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \varkappa(s)\, ds + \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \alpha_i.$$

Hinweis. Approximieren Sie die Kurve in einer Ecke.

Aufgabe 3 (*Röhrenflächen*)
Sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, und γ', v_1, v_2 ein begleitendes C^1-Dreibein mit $v_i' = \lambda_i \gamma'$ (vgl. Aufgabe 4, Serie 2). Betrachten Sie für $r > 0$ die Röhrenfläche

$$F \in C^1(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3),\ F(s, \theta) = \gamma(s) + r\big(\cos(\theta)v_1(s) + \sin(\theta)v_2(s)\big).$$

Zeigen Sie, dass F unter der Bedingung $r \max_{s \in I} \varkappa(s) < 1$ eine Immersion ist, und dass sich die Parameterlinien $s \mapsto F(s, \theta)$ und $\theta \mapsto F(s, \theta)$ senkrecht schneiden.
Hinweis. Berechnen Sie die erste Fundamentalform.

Aufgabe 4 (*Tangentenflächen*)
Sei $\gamma \in C^2(I, \mathbb{R}^3)$ nach der Bogenlänge parametrisiert. Dann heißt $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(s, t) = \gamma(s) + t\gamma'(s)$, Tangentenfläche. Überlegen Sie, unter welchen Voraussetzungen F eine Immersion ist und berechnen Sie die erste Fundamentalform. Spezialisieren Sie auf den Fall, dass γ eine Schraubenlinie ist (siehe Beispiele 1.3 und 2.2 im Skript).

Abgabe Dienstag, 5. Juni 2018