
Aufgabe 1 (*Konforme Parametrisierung von Rotationsflächen*)
Sei $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, $t \in I$, eine reguläre C^1-Kurve mit $r(t) > 0$ für alle t. Zeigen Sie durch geeignete Umparametrisierung von γ, dass die erzeugte Rotationsfläche konform (winkeltreu) parametrisiert werden kann.

Aufgabe 2 (*Stereographische Projektion*)
Die stereographische Projektion ist gegeben durch die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi(x,t) = \tfrac{x}{1-t},$$

wobei $x \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + t^2 = 1$ und $N = (0,0,1)$.

1. Es sei $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ und g die Gerade durch p und N. Zeigen Sie, dass $\Phi(p)$ der Schnittpunkt von g mit der Ebene $\{(x,0) | x \in \mathbb{R}^2\}$ ist. Fertigen Sie eine Skizze an.
2. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung φ von Φ
3. Bestimmen Sie die Matrix der ersten Fundamentalform $G = D\varphi^T D\varphi$ und zeigen Sie, dass $G(x) = \lambda Id$ mit $\lambda > 0$.

Aufgabe 3 (*Längentreu, Flächentreu*)
Die Abbildung $\tilde{X} : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{X}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$ beschreibt einen Zylinder, der die Sphäre $\mathbb{S}^2$ längs des Äquators berührt.

1. Zeigen Sie: $\tilde{X}$ ist längentreu.
2. Bezeichne $X(u,v)$ den Schnittpunkt der Strecke von $\tilde{X}(u,v)$ zum Punkt $(0,0,v)$ mit der $\mathbb{S}^2$. Berechnen Sie $X : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass X flächentreu ist, und bestimmen Sie so den Flächeninhalt der Sphäre.

Aufgabe 4 (*Parametrisierung von Kegeln*)
Sei $\gamma : (0,L) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^1-Kurve. Berechnen Sie die erste Fundamentalform der Kegelfläche

$$F : (0,\infty) \times (o,L) \to \mathbb{R}^3, \quad F(r, s = r\gamma(s)),$$

und fertigen Sie eine Skizze an.

Abgabe Dienstag, 12. Juni 2018