Aufgabe 1 (*Zweite Fundamentalform von Kegeln*)
Sei $\gamma : (0, L) \to \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte C^2-Kurve, und $F : (0, \infty) \times I \to \mathbb{R}^3$, $F(r, s) = r\gamma(s)$, die von γ erzeugte Kegelfläche. Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingartenabbildung von F, einschließlich der Eigenwerte und Eigenvektoren.
Hinweis. Verwenden Sie die Funktion $\varkappa_{\mathbb{S}^2} = \langle \gamma'', \gamma \times \gamma' \rangle$, und zeigen Sie $\varkappa^2 = 1 + \varkappa_{\mathbb{S}^2}^2$, wobei $\varkappa$ die Krümmung der Raumkurve γ ist.

Aufgabe 2 (*Niveaumengen*)
Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^2-Fläche mit $f(F(x)) = 0$ und $Df(F(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Zeigen Sie für $x \in U$ und $v, w \in \mathbb{R}^2$

$$Df(F(x)) \perp \mathit{Bild}(D(F(x)) \quad \text{und} \quad h(x)(v, w) = -\frac{D^2 f(F(x))(DF(x)v, DF(x)w)}{|Df(F(x))|},$$

wobei h die zweite Fundamentalform von F bzgl. der Normalen $N = \frac{Df}{|Df|} \circ F$ ist.

Aufgabe 3 (*Parallelflächen*)
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre C^3-Fläche mit Normale N und Hauptkrümmungen $a \leq \varkappa_{1,2} \leq b$, wobei $a < 0 < b$. Zeigen Sie, dass für $-1/b < s < -1/a$ die Parallelfläche

$$F^s : U \to \mathbb{R}^3,\ F^s(x) = F(x) + sN(x),$$

regulär ist, und beweisen Sie für die Hauptkrümmungen die Formel

$$\varkappa_i^s = \frac{\varkappa_i}{1 + s\varkappa_i}.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Weingartengleichung.

Aufgabe 4
Lesen Sie und verstehen Sie die Bedeutung von Satz 6.3.

Abgabe Dienstag, 19. Juni 2018