Aufgabe 1 (*Ennepersche Fläche*)
Sei $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Ennepersche Fläche, gegeben durch

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

Berechnen Sie die erste und zweite Fundamentalform sowie die Weingartenabbildung und zeigen Sie, dass die mittlere Krümmung $H \equiv 0$ ist.

Aufgabe 2 (*Die Scherksche Fläche* [1])
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \log(\cos x) - \log(\cos y)$$

eine Minimalfläche ist. Bestimmen Sie den Abschluss der Fläche, als Menge im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3 (*Das Möbiusband*)
Berechnen Sie erste und zweite Fundamentalform sowie die mittlere und Gaußsche Krümmung für die Fläche $F : \mathbb{R} \times (-1/2, 1/2) \to \mathbb{R}^3$ mit

$$F(s,t) = (\cos s, \sin s, 0) + t \left(\cos \frac{s}{2} (\cos s, \sin s, 0) + \sin \frac{s}{2} (0,0,1) \right).$$

Fertigen Sie ein Papiermodell an und überzeugen Sie sich davon, dass die Fläche nur eine Seite hat.

Aufgabe 4 (*Rotationflächen*)
Sei $c : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, $c(t) = (r(t), 0, h(t))$, mit $r(t) > 0$ für alle $t \in (a,b)$. Berechnen Sie für die durch Rotation um die z-Achse erzeugte Fläche $F : I \times (0, 2\pi) \to R^3$ die folgenden Grössen:

1. die Hauptkrümmungen $\kappa_{1,2}$,
2. die Hauptkrümmungsricthungen $\nu_{1,2}$,
3. die mittlere Krümmung H und die Gaußsche Krümmung K.

Specialisieren Sie auf das Katenoid, d.h.

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = \left(a \cosh \left(\frac{t}{a} \right), 0, t \right),$$

wobei $a > 0$. Klassifizieren Sie die Punkte in elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch.

Abgabe Dienstag, 26. Juni 2018

[1] http://www.indiana.edu/ minimal/archive/doubly/doublyscherk0/doublyscherk0.html