
Aufgabe 1 (*die Weierstraß-Darstellung*) (4 Punkte)

Betrachten Sie die Fläche $F = (f_1, f_2, f_3)$ mit

$$\begin{aligned}f_1(u, v) &= 2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh(3u) \cos(3v) \\f_2(u, v) &= 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh(3u) \sin(3v) \\f_3(u, v) &= 2 \cosh(2u) \cos(2v).\end{aligned}$$

Finden Sie die zugehörigen ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und f, h in der Weierstraß-Darstellung.

Aufgabe 2 (*Isometrie*) (4 Punkte)

- Zeigen Sie: Ist $f : S_1 \rightarrow S_2$ eine Isometrie, so ist auch $f^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$ eine Isometrie.
- Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine euklidische Bewegung, d.h. $\Phi(x) = Ax + b$, wobei $A \in O(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass $f := \Phi|_S : S \rightarrow \Phi(S)$ eine Isometrie ist.
- Sei $S_1 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ die x - y -Ebene, $S_2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche. Sie zeigen: dass die Abbildung

$$f : S_1 \rightarrow S_2, \quad f(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(x), y)$$

eine lokale Isometrie ist.

Aufgabe 3 (*Richtungsableitung*) (4 Punkte)

Sei $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ die Zylinderfläche mit den Vektorfeldern $X(x, y, z) = (-y, x, 0)^t$ und $Y(x, y, z) = (0, 0, 1)^t$. Berechnen Sie für die Funktionen $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ und $f_3(x, y, z) = z$ auf S die Richtungsableitungen nach X und Y .

Aufgabe 4 (*die Lie Klammer*) (4 Punkte)

Seien X und Y Vektorfeldern auf S und $Z = [X, Y]$ die Lie-Klammer. Zeigen Sie, dass falls X und Y bzgl einer lokalen Parametrisierung (U, F, V) durch

$$X = \sum_{i=1}^2 \xi_i \frac{\partial F}{\partial u^i} \quad Y = \sum_{i=1}^2 \eta_i \frac{\partial F}{\partial u^i}$$

gegeben sind, Z dann

$$Z = \sum_{i,j=1}^2 (\xi_i \frac{\partial \eta_j}{\partial u^i} - \eta_i \frac{\partial \xi_j}{\partial u^i}) \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

erfüllt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 6.7.2020 vor 12:00.