Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2015, Serie 01
Prof. Dr. G. Wang — 20.4.2015
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Eine Raumkurve*) (4 Punkte)
Sei $c(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}), t \in [0,\infty)$ eine parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$.
1. Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} c(t)$ und skizzieren Sie die Projektion der Kurve auf die (x_1, x_2) Ebene.
2. Zeigen Sie, dass c endliche Bogenlänge auf $[0,\infty)$ hat.
3. Parametrisieren Sie die Kurve nach Bogenlänge.
4. Ist c eine reguläre Kurve?

Aufgabe 2 (*Zykloide*) (4 Punkte)
Betrachten Sie eine Kreisscheibe vom Radius 1 in $\mathbb{R}^2$, die gleichmäßig auf der x_1-Achse rollt. Fixieren Sie einen Punkt p auf dem Rand der Kreisscheibe. Zum Zeitpunkt $t = 0$ liege p im Punkt $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ und $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \mathbb{R}^2$ sei die Position von p zum Zeitpunkt $t > 0$. Die durch $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ beschriebene Kurve heißt dann Zykloide.
1) Beschreiben und skizzieren Sie die Kurve.
2) Nun fixieren Sie einen Punkt q in der Kreisscheibe, z.B., $p = (0, r)$ mit $r < 1$. Beschreiben und skizzieren Sie die Kurve.

Aufgabe 3 (*Traktrix*) (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Schleppkurve ($c : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\sin t, \cos t + \ln\tan(t/2))^t$) die folgende Eigenschaft hat, die auch ihren Namen erklärt: Für jeden Kurvenpunkt hat die Strecke auf der Tangente vom Kurvenpunkt zur y-Achse die Länge 1.

Aufgabe 4 (*das Vektorprodukt*) (6 Punkte)
Zeigen Sie: Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ gelten
1. $a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$. (Jacobi-Identität)
2. $a\times(b\times c) = (a\times b)\times c \Leftrightarrow a(b\cdot c) = (a\cdot b)c$. Insbesondere ist $a\times(b\times a) = (a\times b)\times a$.
3. $(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$.
4. $(a \times b) \times (c \times d) = \{(a \times b) \cdot d\}c - \{(a \times b) \cdot c\}d$.
5. $a \times b \neq 0 \Rightarrow \{a, a \times b, a \times (a \times b)\}$ ist ein positiv orientiertes Orthogonalsystem.
6. $(a \times b) \cdot c \neq 0 \Rightarrow \{(b \times c), (c \times a), (a \times b)\}$ ist positiv orientiert.

Die Abgabe der Übungen darf maximal zu zweit erfolgen.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer(n) sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 27.4.15, vor der Vorlesung**.