
Aufgabe 1 (*Krümmung*)

(4 Punkte)

1) Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine regulär parametrisierte Kurve. Dann ist die Krümmung von c gegeben durch

$$\kappa(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

2) Berechne die Krümmung der Ellipse $c(t) = (a \cos t, b \sin t)^t, \tau \in [0, 2\pi), \quad a \neq b$.

Aufgabe 2 (*Abschätzung der Krümmung*)

(4 Punkte)

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Die Kurve verlaufe in der Kreisscheibe vom Radius R , d.h., $\|c(t)\| \leq R$ für alle $t \in I$. An einem inneren Punkt $t_0 \in \text{int}(I)$ berühre die Kurve den Rand der Kreisscheibe, d.h., $\|c(t_0)\| = R$. Zeigen Sie, dass für die Krümmung die folgende Abschätzung

$$|\kappa(t_0)| \geq \frac{1}{R}$$

gilt. (*Hinweis. Betrachte $\frac{d}{dt} \big|_{t=t_0} \|c(t)\|^2$ und $\frac{d^2}{dt^2} \big|_{t=t_0} \|c(t)\|^2$.)*)

Aufgabe 3 (*Umlaufzahl*)

(6 Punkte)

Sei $c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$c(t) = (2 \cos t + 1)(\cos t, \sin t)^t.$$

a) Zeigen Sie, dass diese Kurve geschlossen ist und finden Sie die minimale Periode L . Ist c einfach geschlossen?

b) Zeigen Sie Remark 1.37, nämlich, für eine periodische reguläre parametrisierte ebene Kurve mit Periode L gilt

$$n_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \kappa(t) |c'(t)| dt.$$

c) Bestimmen Sie die Umlaufzahl n_c der oben gegebenen Kurve c .

Bitte wenden Sie!

Aufgabe 4 (*Totalkrümmung*)

(4 Punkte)

Sei $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c(a) = c(b)$. Man zeige, dass für die *Totalkrümmung* der Kurve

$$\int_a^b |\kappa(t)| dt \geq \pi$$

gilt. *Hinweis: Widerspruchsargument.* Man nehme $\int_a^b |\kappa(t)| dt < \pi$ an. Wähle eine Winkelfunktion $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $c'(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))^t$ und zeige

$$0 \leq \max_{t \in [a, b]} \theta(t) - \min_{t \in [a, b]} \theta(t) < \pi, \quad (1)$$

woraus man die Existenz eines $v \in \mathbb{S}^1$ mit $\langle c'(t), v \rangle > 0$ für alle $t \in [a, b]$ folgere. Nun integriere man von a bis b . Im Beweis von (1) benutzen Sie die Gleichung,

$$\theta'(t) = \kappa(t),$$

die wir schon in der Vorlesung bewiesen haben.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 4.5.15, vor der Vorlesung.**