Lösungen zur Vorlesung “Elementare Differentialgeometrie 2015”

Blatt 03

Aufgabe 1: (i) Da $\kappa(t) \neq 0$ für alle t vorausgesetzt wurde, kann man die Gleichung der Evolute einfach ableiten:

$$\dot{m}_c = \dot{c} - \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} n + \frac{\dot{n}}{\kappa} = -\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} n, \tag{1}$$

aufgrund der Frenet-Gleichung

$$\dot{n} = -\kappa \dot{c}. \tag{2}$$

(ii) Es gilt

$$L(m_c|[a,b]) = \int_a^b \frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} = -\int_a^b \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\kappa}\right) = \frac{1}{\kappa(a)} - \frac{1}{\kappa(b)}. \tag{3}$$

(iii) folgt direkt aus (ii).

(iv) Sei x im Schmiegekreis bei t_2, dann gilt

$$|x - m_c(t_1)| \leq |x - m_c(t_2)| + |m_c(t_2) - m_c(t_1)| \leq \frac{1}{\kappa(t_1)} \tag{4}$$

und somit liegt x auch im Schmiegekreis bei t_1.

(v) In (ii) setze $a = 0$ und $b = \infty$ und erhalte

$$L(m_c) = \frac{1}{\kappa(0)} - \frac{1}{\kappa(\infty)}, \tag{5}$$

wobei $\kappa(\infty) = \lim_{t\to\infty} \kappa(t)$, was aufgrund der Monotonie wohldefiniert ist. Nun rechnet man unter Verwendung der endlichen Länge nach, dass $c(t)$ für $t \to \infty$ eine Cauchy-Folge ist.

(vi)

$$|m_c(\infty) - c(t)| \leq |m_c(\infty) - m_c(t)| + |m_c(t) - c(t)| \to \frac{1}{\kappa(\infty)}. \tag{6}$$

(vii) Die Parabel ist parametrisiert durch

$$c(t) = (t, t^2). \tag{7}$$

Verwende Aufgabe 1 von Blatt 2, um κ zu berechnen.

$$\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{8}$$

Es gilt

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}(-2t, 1) \tag{9}$$

und somit

$$m(t) = \left(-4t^3, \frac{1}{2} + 3t^2\right), \tag{10}$$

was in der behaupteten Menge liegt.

Aufgabe 2: Es gilt

$$2\pi n_c = \int_0^L \kappa \tag{11}$$

und somit

$$2\pi \leq |2\pi n_c| \leq \sqrt{L}\left(\int_0^L \kappa^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

nach der Hölderschen Ungleichung. Umsortieren ergibt die Behauptung. Im Falle der Gleichheit müssen beide Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt sein, d.h. $n_c = 1$ und die Höldersche Ungleichung muss mit Gleichheit gelten. Letzteres ist nur der Fall, wenn κ konstant ist. Aus Aufgabe 1(iii) folgt dann, dass es nur einen einzigen Schmiegekreis geben kann. Somit muss die Kurve bereits ein Kreis sein.

Aufgabe 3: (i) Es gelten

$$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b), \tag{13}$$

$$c''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \tag{14}$$

und somit

$$\kappa = \|c''\| = a. \tag{15}$$

Der Normalenvektor ist

$$n = \frac{c''}{\kappa} = (-\cos t, -\sin t, 0) \tag{16}$$

und somit ist die Torsion

$$\tau = \langle n', c' \times n\rangle = b. \tag{17}$$

(ii) (a) Wegen $\langle b, b\rangle = \langle b', b'\rangle = 1$ gilt

$$\langle b', b\rangle = \langle b'', b'\rangle = 0. \tag{18}$$

Außerdem gilt

$$c' = b \times b' \tag{19}$$

und somit

$$c'' = b \times b'' = \lambda b' \tag{20}$$

für ein geeignetes $\lambda \neq 0$, da b' sowohl auf b als auch auf b'' senkrecht steht. Daraus folgt

$$n = \pm b' \tag{21}$$

und somit

$$n' = \pm b''. \tag{22}$$

Nach Definition der Torsion ist

$$\tau = \langle \pm b'', c' \times n\rangle = \mu\langle b'', b\rangle, \tag{23}$$

für ein geeignetes $\mu \neq 0$. Aber wegen (18) gilt

$$0 = \langle b'', b\rangle + \langle b', b'\rangle, \tag{24}$$

woraus die Behauptung folgt.

(b) Eine Transformation der Form

$$\tilde{c} = \lambda c, \quad \lambda \neq 0, \tag{25}$$

zieht folgende Transformation der Torsion nach sich:

$$\tilde{\tau} = \lambda\tau. \tag{26}$$

Somit lässt sich jede konstante, nichtverschwindende Torsion mit einer Streckspiegelung zu $\tilde{\tau} = 1$ transformieren.

Sei also c eine reguläre Kurve, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Setze

$$b := c' \times n. \tag{27}$$

Dann gilt

$$b' = c' \times n' = c' \times (c' \times n) \tag{28}$$

und somit

$$|b'| = 1. \tag{29}$$

Definiere

$$\gamma(t) = \int_{t_0}^{t} b(s) \times b'(s)\ ds + c(t_0). \tag{30}$$

Dann rechnet man nach, dass $\gamma' = c'$ gilt und weil $\gamma(t_0) = c(t_0)$ gilt, muss $\gamma = c$ gelten.

(iii) Aufgrund der Frenet-Gleichungen verschwindet die Torsion genau dann für alle t, wenn der Binormalenvektor konstant ist. Somit spannen c' und c'' immer die gleiche Schmiegebene auf, was bedeutet dass die Kurve für alle t in dieser verlaufen muss, da

$$\frac{d}{dt}\langle c, b\rangle = \langle \dot{c}, b\rangle = 0. \tag{31}$$