Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2015, Serie 04
Prof. Dr. G. Wang — 11.5.2015
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Raumkurve*) (4 Punkte)

Seien $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^3$ verschiedene nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurven mit nirgends verschwindenden Krümmungen und Torsionen. Man sagt, c und $\tilde{c}$ bilden ein Bertrandsches Kurvenpaar, falls

$$c(t) + \mathbb{R}n_c(t) = \tilde{c}(t) + \mathbb{R}n_{\tilde{c}}, \text{ für alle } t \in I,$$

wobei n_c (bzw. $n_{\tilde{c}}$) der Normalvektor von c (bzw. $\tilde{c}$) ist.
Zeigen Sie:
a) $\tilde{c} = c + rn_c$, wobei r konstant ist.
b) Der Winkel, der von c' und $\tilde{c}'$ eingeschlossen wird, ist konstant.
c) Sowohl c als auch $\tilde{c}$ haben eine konstante Krümmung und eine konstante Torsion.

Aufgabe 2 (*Länge*) (4 Punkte)

Zeigen Sie Lemma 1.59: Sei $s \in I = [a, b]$. Dann gilt für $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$

$$L(c) = L(c_{|[a,s]}) + L(c_{|[s,b]}).$$

Aufgabe 3 (*reguläre Fläche*) (4 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 - r^2$, $0 < r < R$. Skizzieren Sie $F^{-1}(\{0\})$. Finden Sie ein parametrisiertes Flächenstück dessen Bild in $F^{-1}(\{0\})$ liegt. Berechnen Sie die Tangentialräume in allen Punkten von $F^{-1}(\{0\})$.

Aufgabe 4 (*glatte Abbildung*) (4 Punkte)

Sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und seien $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^3$ reguläre Flächen mit $S_1 \subset V$. Sei $f : V \to \mathbb{R}^3$ eine glatte Abbildung mit $f(S_1) \subset S_2$. Zeigen Sie:

$$f|_{S_1} : S_1 \to S_2$$

ist glatt im Sinne der Definition 2.10.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 18.5.15, vor der Vorlesung**.