Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2015, Serie 05
Prof. Dr. G. Wang — 18.5.2015
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Sphäre*) (4 Punkte)

Für die Einheitssphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ können wir zwei lokale Parametrisierungen $(U_N = \mathbb{R}^2, F_N, V_N = \mathbb{R}^3)$ und $(U_S = \mathbb{R}^2, F_S, V_S = \mathbb{R}^3)$ angeben, indem wir die stereographischen Projektionen p_N vom Nordpol $N = (1,0,0)$ und p_S vom Südpol $S = (-1,0,0)$ mit Radius 1 verwenden. Dann gilt $\mathbb{S}^2 = F_N(U_N) \cup F_S(U_S)$.
In Formeln sind p_N und p_S gegeben durch

$$p_N(x) = \frac{1}{1-x_0}(x_1, x_2); \quad p_S(x) = \frac{1}{1+x_0}(x_1, x_2).$$

Berechnen Sie F_N, F_S, und $F_N^{-1} \circ F_S : F_S^{-1}(V_N \cap V_S) \to F_N^{-1}(V_N \cap V_S)$.

Aufgabe 2 (*Rotationsfläche*) (4 Punkte)

Man betrachte eine Kurve in der (r,z)-Ebene gegeben durch $c(t) = (r(t), z(t))$ für $t \in (a,b)$ mit $r(t) > 0$. Wenn diese um die z-Achse gedreht wird, erhalten wir eine Rotationsfläche. Wir führen den Parameter θ ein, um die Rotationsfläche wie folgt zu parametrisieren:

$$F(t,\theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, z(t)) \quad \text{für } t \in (a,b), \theta \in (0, 2\pi).$$

Hierbei bestimmt t die Position auf der Kurve und θ den Drehwinkel. Die t-Kurven heißen Meridiane und die θ-Kurven Breitenkreise.

(a) Zeigen Sie, dass $F((a,b) \times (0,2\pi))$ eine reguläre Fläche ist, falls c regulär und injektiv ist. Berechnen Sie ihre Tantentialebene und den Einheitsnormalenvektor.

(b) Betrachten Sie die zu $c(t) = (r(t), z(t)) = (2 + \cos t, \sin t)$ gehörende Rotationsfläche für $t \in (-\pi, \pi)$. Zeigen Sie, dass die Bedingungen aus (a) erfüllt sind, und beschreiben Sie die dort genannten Größen explizit. Wie sieht diese Fläche aus? Beschreiben Sie ihre Meridiane und Breitenkreise in parametrisierter Form.

(c) Berechnen Sie die metrischen Koeffizienten einer Rotationsfläche.

Bitte wenden Sie!

Aufgabe 3 (*die erste und zweite Fundamentalform*) (4 Punkte)

Betrachten Sie das parametrisierte Flächenstück

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r), \quad r \in \mathbb{R}^+, \theta \in (0, 2\pi).$$

Bestimmen Sie die Komponenten der ersten und zweiten Fundamentalformen (g_{ij}) und (h_{ij}). Sei $c(t)$ die Kurve in diesem Flächenstück, die im Parameterbereich gegeben ist durch $r(t) = e^{t(\cot\alpha)/2}$ und $\theta(t) = t/\sqrt{2}$, mit $t \in [0, \pi]$ und einer Konstanten α. Berechnen Sie die Länge dieser Kurve und zeigen Sie, dass der Winkel zwischen der Kurve $c(t)$ und den Kurven $\{\theta = \text{konst.}\}$ auf dem Flächenstück gleich α ist.

Hinweis: Wenn sich zwei reguläre Kurven c_1 und c_2 in einem Punkt $p = c_1(0) = c_2(0)$ schneiden, dann ist der Winkel ϕ in p zwischen den Kurven definiert durch

$$\cos\phi = \frac{\langle c_1'(0), c_2'(0)\rangle}{\|c_1'(0)\|\|c_2'(0)\|}.$$

Aufgabe 4 (*das Möbiusband*) (4 Punkte)

Man betrachte die Abbildung $F : [-\pi, \pi) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(\theta, t) := \left(\left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 + t\cos\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\sin\frac{\theta}{2}\right).$$

Das Bild $S = F([-\pi, \pi] \times (-1, 1))$ ist ein Möbiusband. Zeigen Sie, dass S eine reguläre Fläche ist, die nicht orientierbar ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es ein stetiges Einheitsvektorfeld $N : S \to \mathbb{R}^3$ gibt. Beschränken Sie Ihre Untersuchung von N auf die Kurve $K := F([\pi, \pi) \times \{0\})$, indem Sie für jedes $p \in K$ zunächst den Tangentialraum T_pS (mit Hilfe der Abbildung F) bestimmen. Zeigen Sie dann, dass die Abbildung N in K unstetig ist.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 1.6.15, vor der Vorlesung**.