Lösungen zur Vorlesung "Elementare Differentialgeometrie 2015"

Blatt 05

Aufgabe 1: F_N ist gegeben durch p_N^{-1}. Sei

$$p_N(x) = (y_1, y_2), \tag{1}$$

dann ist

$$|y|^2 = \frac{1+x_0}{1-x_0} \tag{2}$$

und somit

$$x_0 = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}. \tag{3}$$

Daraus folgt

$$F_N = p_N^{-1}(y) = \frac{1}{|y|^2+1}(|y|^2-1, 2y_1, 2y_2). \tag{4}$$

Die stereographische Projektion vom Südpol ist gegeben durch

$$p_S = p_N \circ T, \tag{5}$$

wobei T die Spiegelung and der (x_1, x_2)-Ebene ist.

Damit ist

$$F_S = p_S^{-1} = T^{-1} \circ F_N = T \circ F_N \tag{6}$$

und

$$F_N^{-1} \circ F_S(y) = p_N \circ T \circ F_N(y) = \frac{1}{|y|^2}(y_1, y_2). \tag{7}$$

Aufgabe 2: Wir beginnen mit Teil (c), weil wir diese Rechnung benötigen, um (a) zu lösen.

(c)

$$g_{tt} = \langle F_t, F_t \rangle = \dot{r}^2 + \dot{z}^2, \tag{8}$$

$$g_{\theta\theta} = \langle F_\theta, F_\theta \rangle = r^2, \tag{9}$$

$$g_{t\theta} = g_{\theta t} = \langle F_\theta, F_t \rangle = 0. \tag{10}$$

(a) Für zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq |v||w| \tag{11}$$

genau dann mit Gleichheit, wenn die Vektoren linear abhängig sind. Nun gilt

$$|g_{t\theta}|^2 = 0 < r^2(\dot{r}^2 + \dot{z}^2) = g_{\theta\theta} g_{tt}, \tag{12}$$

weil $r > 0$ und c regulär ist. Daher sind F_t und F_θ linear unabhängig. Da c regulär und injektiv ist. Um zu zeigen, dass das Bild von F eine reguläre Fläche ist, verwende lokale stetige Inverse von c und von $\theta \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$: Sei γ eine lokale inverse von c und ϑ eine lokale Inverse der letzteren Abbildung, dann ist eine lokale stetige Inverse von F gegeben durch

$$F^{-1}(v, w, x) = \left(\gamma\left(\sqrt{v^2+w^2}, x \right), \vartheta\left(\frac{(v, w)}{\sqrt{v^2+w^2}} \right) \right). \tag{13}$$

Da $r > 0$ vorausgesetzt wurde und γ als auch ϑ stetig sind, ist F^{-1} stetig. Man beachte nochmals, dass es sich bei F^{-1} nicht um eine globale Umkehrfunktion handelt, sondern um eine lokale. Verzichtet man auf die Stetigkeit von γ, so gilt die Darstellung auch global. So sieht man, dass F injektiv ist.

Die Tangentialebene wird aufgespannt von

$$F_t = (r'(t)\cos\theta, r'(t)\sin\theta, z'(t)) \tag{14}$$

und von

$$F_\theta = (-r(t)\sin\theta, r(t)\cos\theta, 0). \tag{15}$$

Die Normalenvektoren sind dann

$$\begin{aligned} n &= \pm \frac{F_t \times F_\theta}{\|F_t \times F_\theta\|} \\ &= \pm \frac{1}{\|F_t \times F_\theta\|}(-z'r\cos\theta, -z'r\sin\theta, r'r). \end{aligned} \tag{16}$$

(b) Es gilt

$$c'(t) = (-\sin t, \cos t). \tag{17}$$

Somit ist c regulär und c ist injektiv, da es sich um eine Kreispaprametrisierung um den Punkt $(2,0)$ handelt. Somit ist die Fläche ein Torus mit Meridianen

$$t \mapsto ((2+\cos t)\cos\theta, (2+\sin t)\sin\theta, \sin t) \tag{18}$$

und Breitenkreisen

$$\theta \mapsto ((2+\cos t)\cos\theta, (2+\sin t)\sin\theta, \sin t). \tag{19}$$

Tangentialvektoren und Normalen rechnet man mit Hilfe von (a) aus.

Aufgabe 3: Die Fläche ist ein Spezialfall der aus Aufgabe 2 mit $r(t) = z(t) = r$, $r > 0$. Die Metrik ist dann

$$g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Nach Aufg. 2(a) ist ein Normalenvektor gegeben durch

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta, \sin\theta, -1). \tag{21}$$

Somit ist die zweite Fundamentalform gegeben durch

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{2}}, \end{pmatrix} \tag{22}$$

wobei wir die Formel

$$h_{\theta\theta} = \left\langle \frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}, n \right\rangle \tag{23}$$

verwendet haben. Wählen wir die andere Normale, so kehrt sich das Vorzeichen der zweiten Fundamentalform um.

Es gilt

$$\dot{c} = \left(\frac{\cot\alpha}{2} e^{t\frac{\cot\alpha}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \tag{24}$$

und somit

$$\|\dot{c}\|_g^2 = \frac{1}{2}\left(\cot^2\alpha + 1\right) e^{t\cot\alpha} = \frac{1}{2\sin^2\alpha} e^{t\cot\alpha}. \tag{25}$$

Damit ist

$$L(c) = \int_0^\pi \|\dot{c}\| = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[e^{t\frac{\cot\alpha}{2}} \right]_0^\pi = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left(e^{\pi\frac{\cot\alpha}{2}} - 1 \right). \tag{26}$$

Sei $\gamma = (1,0)$. Dann ist

$$\left\langle \frac{\dot{c}}{\|\dot{c}\|}, \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} \right\rangle_g = \cos\alpha. \tag{27}$$

Hierbei zeigt der Index g jeweils an, dass Norm und Skalarprodukt bez. der Metrik g gebildet werden, da wird die Kurven nicht in $\mathbb{R}^3$, sondern im Parameterbereich betrachten.

Aufgabe 4: Es gelten

$$F_\theta = \left(-\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta - \sin\theta\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right), -\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta + \cos\theta\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right), \frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \tag{28}$$

und

$$F_t = \left(\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta, \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sin\frac{\theta}{2}\right). \tag{29}$$

Daher gelten

$$\langle F_t, F_\theta\rangle = -\sin\theta\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right) + \cos\theta\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right) = 0, \tag{30}$$

$$\|F_t\|^2 = 1 \tag{31}$$

und

$$\|F_\theta\|^2 = \frac{t^2}{4} + \left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \tag{32}$$

Sei ϑ analog zu Aufgabe 2(a) definiert. Ferner sei $(v, w, x) \in \operatorname{Im} F$. Dann gilt

$$f(t,\theta) \equiv \left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)^2 = v^2 + w^2 \tag{33}$$

und somit

$$\theta = \vartheta\left(\frac{(v,w)}{\sqrt{v^2+w^2}}\right) \tag{34}$$

Es gilt

$$\nabla f(t,\theta) = 2\left(1+t\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}, -\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) \tag{35}$$

für alle $(t,\theta) \in (-1,1)\times(-\pi,\pi)$. Insbesondere ist $f_t \neq 0$. Daher kann man nach dem Theorem über die implizite Funktion $t = t(\theta)$ schreiben, wobei

$$\frac{dt}{d\theta} = -\frac{f_\theta}{f_t}. \tag{36}$$

Somit haben wir in diesem Fall eine stetige Umkehrung von F gefunden. Betrachtet man nun eine Umbegung um $-\pi$, so kann man die dritte Koordinate verwenden, um nach t aufzuösen, da hier der Sinus hier nicht 0 ist.

Sei N eine stetige Normale. Dann hat die Determinante der Matrix (F_t, F_θ, N) ein einheitliches Vorzeichen. Somit ist

$$N = \pm\frac{F_t \times F_\theta}{\|F_t \times F_\theta\|}. \tag{37}$$

Allerdings gilt

$$(F_t \times F_\theta)(\theta, 0) = \left(-\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta, -\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}, \cos^2\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin^2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right) \tag{38}$$

und somit

$$(F_t \times F_\theta)(-\pi, 0) = (1,0,0) \tag{39}$$

und

$$(F_t \times F_\theta)(\pi, 0) = (-1,0,0). \tag{40}$$

Jede global stetige Normale macht also einen Sprung, wenn man einmal um K herumläuft, im Widerspruch zur Stetigkeit.