Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2015, Serie 07
Prof. Dr. G. Wang — 8.6.2015
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*das Flächenintegral*) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass alle f_i (die in der S. 55 gefundenen Zerlegung von f) integrierbar sind im Sinne von Definition 2.40, falls f integrierbar ist im Sinne von Definition 2.42.

b) Zeigen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_S f dA$ in Definition 2.42 unabhängig von der Wahl der Zerlegung $f = f_1 + \cdots + f_k$ ist.

Aufgabe 2 (*Flächenelement und Flächeninhalt*) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für eine lokale Parametrisierung (U, F, V) einer regulären Fläche

$$\det(g_{ij}) = \left\| \frac{\partial F}{\partial u^1} \times \frac{\partial F}{\partial u^2} \right\|^2$$

gilt.

b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, seien $(U_i, F_i, V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ lokale Parametrisierungen, die S überdecken, d.h., $S \subset \cup_{i=1}^{\infty} V_i$. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subset S$ bereits eine Nullmege ist, falls die $F_i^{-1}(N) \subset U_i$ Nullmenge sind.

Hinweis. Benutzen Sie die Tatsachen, dass abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind, und dass glatte Abbildungen Nullmengen auf Nullmengen abbilden.

Aufgabe 3 (*Regelfläche*) (4 Punkte)

a) Sei $F(t, s) = c(t) + sv(t)$ eine Parametrisierung einer Regelfläche. Zeigen Sie:

$$K(F(t, s)) < 0$$

genau dann, wenn $\dot{c}(t), v(t)$ und $\dot{v}(t)$ linear unabhängig sind.
b) Zeigen Sie, dass das hyperbolische Paraboloid mit der Gleichung $x^2 - y^2 - z = 0$ als Regelfläche parametrisiert werden kann.
c) Berechnen Sie die Gaußkrümmung des verallgemeinerten Zylinders und des verallgemeinerten Kegels. (Beispiele in S. 58)

Aufgabe 4 (*Die Willmore-Vermutung*) (4 Punkte)

Der Rotationstorus ist durch

$$F(u,v) = ((R + r\cos u)\cos v, (R + r\cos u)\sin v, r\sin u), \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi, 0 < r < R$$

gegeben, siehe Aufgabe 1, Serie 06. Dabei sind $R > r > 0$ beliebige (aber feste) Parameter. Man berechne die totale mittlere Krümmung des Rotationstorus als das Flächenintegral über die Funktion $(H(u,v))^2$, $0 \leq u, v \leq 2\pi$, und zwar explizit in Abhängigkeit von R und r. Welcher ist der kleinstmögliche Wert der totalen mittleren Krümmung?

Bemerkung. Die Willmore-Vermutung besagt, dass kein immersierter Torus im $\mathbb{R}^3$ eine kleinere totale mittlere Krümmung als der obige (optimale) Rotationstorus haben kann, egal wie er sonst geometrisch aussieht. Diese Vermutung wurde von Fernando Marques and André Neves 2012 gelöst.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 15.6.15, vor der Vorlesung**.