Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2015, Serie 09
Prof. Dr. G. Wang — 22.6.2015
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Der Graph*) (4 Punkte)

Sei S der Graph der Funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass S genau dann eine Minimalfläche ist, wenn ϕ folgende partielle Differentialgleichung erfüllt:

$$(1 + \phi_y^2)\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (1 + \phi_x^2)\phi_{yy} = 0.$$

(Die Gleichung heißt die Gleichung der Minimalflächen.)

b) Leiten Sie eine Formel für die Gauß-Krümmung von S her und zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung genau dann positiv ist, wenn die Hesse-Matrix von ϕ definit ist.

Aufgabe 2 (*Isometrie*) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist $f : S_1 \to S_2$ eine Isometrie , so ist auch $f^{-1} : S_2 \to S_1$ eine Isometrie.

b) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine euklidische Bewegung, d.h, $\Phi(x) = Ax + b$, wobei $A \in O(3)$ und $b \in \mathbb{R}^3$. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass $f := \Phi_{|S} : S \to \Phi(S)$ eine Isometrie ist.

c) Seien E_1 und $E_2 \subset \mathbb{R}^3$ affine Ebenen. Zeigen Sie, dass E_1 und E_2 isometrisch sind.

Aufgabe 3 (*Richtungsableitung und kovariante Ableitung*) (4 Punkte)

a) Sei $S = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder mit den Vektorfeldern $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$ unf $Y(x, y, z) = (0, 0, 1)$. Berechnen Sie für die Funktionen $f_1(x, y, z) = x$, $f_2(x, y, z) = y$ und $f_3(x, y, z) = z$ auf S die Richtungsableitung nach X und Y.

b) Sei $S = \mathbb{S}^2$ die Sphäre und

$$c : \mathbb{R} \to S, \quad c(t) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta)$$

mit $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ fest. Die Kurve beschreibt einen Breitenkreis. Zeigen Sie: Die kovariante Ableitung von c' verschwindet genau dann, wenn $\theta = 0$.
Bitte wenden

Aufgabe 4 (*die Lie-Klammer*) (4 Punkte)

Seien X und Y Vektorfelder auf S und $Z = [X, Y]$ die Lie-Klammer. Zeigen Sie, dass falls X und Y bzgl. einer lokalen Parametrisierung (U, F, V) durch

$$X = \sum_{i=1}^{2} \xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i} \quad Y = \sum_{i=1}^{2} \eta^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$$

gegeben sind, Z dann

$$Z = \sum_{i,j=1}^{2} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial F}{\partial u^j}$$

erfüllt.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 29.6.15, vor der Vorlesung**.