

**Aufgabe 1** (*Kovariante Ableitung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Definition 3.23 nicht davon abhängt, welche Kurve  $c$  mit  $c(0) = p$  und  $c'(0) = w_p$  man nimmt.

(*Hinweis.* Sie zeigen, dass die kovariante Ableitung in Richtung  $w_p = \sum_{k=1}^2 \eta^k \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$

$$\nabla_{w_p} \left( \sum_k \xi^k \frac{\partial F}{\partial u^k} \right) = \sum_k \left( \sum_l \frac{\partial \xi^k}{\partial u^l}(u) \eta^l + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k \xi^i(u) \eta^j \right) \frac{\partial F}{\partial u^k}$$

erfüllt für  $v = \sum_{k=1}^2 \xi^k(u) \frac{\partial F}{\partial u^k}(u)$ .)

**Aufgabe 2** (*Gauß-Krümmung und Riemannsche Krümmung*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gauß-Krümmung bzgl. einer lokalen Parametrisierung gegeben ist durch

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} g^{jk} R_{ijk}^i.$$

**Aufgabe 3** (*Torsion-frei*) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für je zwei glatte Vektorfelder  $v$  und  $w$  auf einer regulären Fläche mit einer Riemannschen Metrik

$$\nabla_v w - \nabla_w v = [v, w]$$

gilt.

**Aufgabe 4** (*Poincaré-Halbebene*) (4 Punkte)

Die Poincaré-Halbebene ist erklärt als die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$  mit der Riemannschen Metrik

$$(g_{ij}) = y^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obwohl diese nicht von einer Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$  induziert wird, kann man dennoch die Christoffelsymbole und die Gauß-Krümmung berechnen. Tun Sie dies!

---

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 6.7.15, vor der Vorlesung.**