Übungsaufgaben zur Vorlesung
Elementare DG — SS 2015, Serie 11
Prof. Dr. G. Wang — 6.7.2015
Dr. J. Scheuer

Aufgabe 1 (*Poincaré-Halbebene*) (4 Punkte)
Die Poincaré-Halbebene ist erklärt als die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ mit einer Riemannschen Metrik:

$$(g_{ij}) = y^{-2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 10, um die Geodätischen zu berechnen.
(*Hinweis*: Die Geodätischen sind die Halbgeraden mit konstantem x sowie die Halbkreise, deren Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.)

Aufgabe 2 (*kovariante Ableitung und Gauß-Krümmung einer Metrik*) (4 Punkte)

a) Sei g eine Riemannsche Metrik auf S. Zeigen Sie:

$$\partial_X g(V,W) = g(\nabla_X V, W) + g(V, \nabla_X W)$$

für Vektorfelder X, V, W.

b) Sei $\kappa \in \mathbb{R}$ eine Konstane. Im Fall $\kappa \geq 0$ sei $S = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, im Fall $\kappa < 0$ dagegen sei $S = \{(x,y,0) \,|\, x^2 + y^2 < -\frac{4}{\kappa}\}$. Auf S sei die Riemannsche Metrik g in den kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$(g_{ij}(x,y)) = \frac{1}{(1+\kappa(x^2+y^2)/4)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Gauß-Krümmung.

Aufgabe 3 (*Geodäten auf Drehflächen, geodätische Krümmung*) (4+4 Punkte)
Es sei $c(t) = (u(t), z(t)) : I \to \mathbb{R}^2$ nach Bogenlänge parametrisiert mit $\rho > 0$ und $F : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $F(u,v) = (\rho(u)\cos v, \rho(u)\sin v, z(u))$ die zugehörige Drehfläche.

a) Berechnen Sie die kovarianten Ableitungen $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u}} \frac{\partial F}{\partial u}$, $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial u}} \frac{\partial F}{\partial v}$ und $\nabla_{\frac{\partial F}{\partial v}} \frac{\partial F}{\partial v}$.

b) Zeigen Sie: Die Kurven $u \to F(u,v)$ (Meridiane) sind Geodäten für alle $v \in \mathbb{R}$.

c) Zeigen Sie: Die Kurven $v \to F(u,v)$ (Breitenkreise) sind Geodäten genau für diejenigen $u \in I$ mit $\rho'(u) = 0$.

d) Bestimmen Sie die geodätische Krümmung der Breitenkreise $v \mapsto F(u,v)$ für festes u.

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen, die Matrikelnummer sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. **Abgabe ist am Montag, 13.7.15, vor der Vorlesung**.