Aufgabe 1 (*Fortsetzungsprinzip*)
Seien X, Y metrische Räume, Y vollständig, und $A \subset X$ eine dichte Teilmenge. Zeigen Sie: ist $f : A \to Y$ gleichmäßig stetig, so gibt es genau eine gleichmäßige stetige Abbildung $\widetilde{f} : X \to Y$ mit $\widetilde{f}|_A = f$. Belegen Sie mit einem Beispiel, dass die Voraussetzung der Gleichmäßigkeit benötigt wird.

Aufgabe 2 (L^2*-Norm auf* $C^0([0,1])$)
Sei $I = [-1, 1]$. Zeigen Sie, dass auf $C^0(I)$ durch

$$\|u\|_{L^2} = \left(\int_{-1}^{1} u(x)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Norm gegeben ist, dass aber $(C^0(I), \|\cdot\|_{L^2})$ kein Banachraum ist.

Aufgabe 3 (*Norm von Fredholmoperatoren*)
Für $I = [0, 1]$ sei $K : (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)}) \to (C^0(I), \|\cdot\|_{C^0(I)})$ gegeben durch

$$(Kf)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y) \, dy, \qquad \text{wobei } k \in C^0(I \times I).$$

Berechnen Sie die Operatornorm von K.

Aufgabe 4 (*Hausdorffmetrik*)
Zeigen Sie, dass auf der Menge $\mathcal{A}$ der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ eine Metrik gegeben ist durch

$$d(A_1, A_2) = \inf \{\varrho > 0 : A_1 \subset B_\varrho(A_2),\ A_2 \subset B_\varrho(A_1)\}.$$

Dabei ist $B_\varrho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < \varrho\}$.

Abgabe am Mittwoch, 27. Oktober, in der Vorlesung