
Aufgabe 1 ($L^p(\mu)$ *ist separabel für* $1 \leq p < \infty$)
Sei μ ein Radonmaß auf einem lokal-kompakten, separablen metrischen Raum (X, d). Beweisen Sie, dass $L^p(\mu)$ im Fall $1 \leq p < \infty$ separabel ist, dass also eine abzählbare dichte Teilmenge existiert.

Aufgabe 2 ($L^\infty(\mu)$ *ist nicht separabel*)
Sei μ endliches Maß auf X. Zeigen Sie:

$$L^\infty(\mu) \text{ separabel} \quad \Leftrightarrow \quad \dim L^\infty(\mu) < \infty.$$

Hinweis. Nehmen Sie an, es gibt eine disjunkte Zerlegung $X = \bigcup_{i=1}^\infty E_i$ in messbare Mengen mit $\mu(E_i) > 0$. Zeigen Sie, dass dann $L^\infty(\mu)$ nicht separabel ist.

Aufgabe 3 (*Das Hausdorff-Maß ist Borelregulär*)
Sei $0 \leq s < \infty$ und $\alpha(s) = \pi^{s/2}/\Gamma(s/2+1)$, also $\alpha(s) = \mathcal{L}^s(\{x \in \mathbb{R}^s : |x| < 1\}$ im Fall $s \in \mathbb{N}$. Das s-dimensionale Hausdorff-Maß von $A \subset \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\mathcal{H}^s(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta,$$

wobei für $0 < \delta \leq \infty$ gesetzt ist:

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf\Big\{\sum_{j=1}^\infty \alpha(s)\Big(\frac{\text{diam } C_j}{2}\Big)^s : A \subset \cup_{j=1}^\infty C_j,\ \text{diam } (C_j) \leq \delta\Big\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{H}^s$ ein Borelreguläres äußeres Maß ist.

Aufgabe 4 (*Variations-Zugang zur L^p-L^q-Dualität*)
Sei $S^p = \{f \in L^p(\mu) : \|f\|_{L^p} = 1\}$. Betrachte für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\mathcal{D}^p : S^p \to S^q,\ \mathcal{D}^p(f) = |f|^{p-2}f.$$

Sei $\varphi \in L^q(\mu)'$ mit $\|\varphi\| = 1$. Zeigen Sie für $f_0 \in L^p(\mu)$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) $\Lambda(f_0) = \varphi$, wobei $\Lambda : L^p(\mu) \to L^q(\mu)'$, $\Lambda(f)(g) = \int fg\, d\mu$.

(b) $\|f_0\|_{L^p} = 1$ und $\varphi(g_0) = \sup_{g \in S^q} \varphi(g)$ mit $g_0 = \mathcal{D}^p(f_0)$.

Hinweis: Um *b)* $\Rightarrow$ *a)* zu zeigen, berechnen Sie für beliebiges $g \in L^q(\mu)$ die Ableitung bei $t = 0$ (wenn existent) der Fun ktion

$$t \mapsto \varphi\left(\frac{g_0 + tg}{\|g_0 + tg\|_{L^q}}\right).$$

Bemerkung: Die L^p-L^q-Dualität folgt, wenn das Supremum angenommen wird. Dies beruht auf der gleichmäßigen Konvexität der L^q-Einheitskugel, welche mit Methoden aus Analysis 1 gezeigt werden kann, allerdings ist der Beweis nicht einfach.

Frohe Weinachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr! Abgabe am Mittwoch, 12. Januar 2005, in der Vorlesung.