Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis — WS 04/05, Serie 11

Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 12. Januar 2005

Aufgabe 1 (*Zum Beweis des Darstellungssatzes von Riesz*)
Sei X ein lokalkompakter, separabler metrischer Raum. Betrachten Sie

$$\Lambda : C^0_c(X, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R},\ \Lambda(f) = \int_X \langle f, \nu \rangle \, d\mu,$$

wobei $\mu = |\Lambda|$ und $\nu \in L^\infty(\mu; \mathbb{R}^k)$. Folgern Sie, dass $|\nu(x)| = 1$ für μ-fast-alle $x \in X$.

Aufgabe 3 (*BV-Funktionen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Betrachten Sie für $f \in L^1(\Omega)$ das Funktional

$$\phi_f : C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R},\ \phi_f(g) = -\int_\Omega f \operatorname{div}(g) \, d\mathcal{L}^n.$$

Die Funktion f heißt von beschränkter Variation auf Ω, kurz $f \in BV(\Omega)$, falls gilt:

$$\sup\{\phi_f(g) : |g| \leq 1 \text{ auf } \Omega\} < \infty.$$

Zeigen Sie: es gibt ein Radonmaß μ_f auf Ω und eine μ_f-messbare Funktion $\nu_f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mit $|\nu_f| = 1$ für μ_f-fast-alle $x \in \Omega$, so dass gilt:

$$\phi_f(g) = \int_\Omega \langle g, \nu_f \rangle \, d\mu_f \text{ für alle } g \in C^0_c(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

Bestätigen Sie $\mu_f = \mathcal{L}^n \llcorner |Df|$ und $\nu_f = \frac{Df}{|Df|}$ für $f \in C^1(\Omega)$.

Aufgabe 3 (*Nichtnegative Funktionale und Radonmaße*)
Sei $\Lambda : C^\infty_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear und nichtnegativ, d.h

$$\lambda(f) \geq 0 \quad \text{für } f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+_0).$$

Dann ist Λ lineares Funktional auf $C^0_c(\Omega)$, und es gibt ein Radonmaß μ mit

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu, \text{ für alle } f \in C^0_c(\mathbb{R}^n).$$

Aufgabe 4 (*Schwache Konvergenz*)
Untersuchen Sie die Folge $f_n : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(nx)$, auf schwache und schwach$*$-Konvergenz in allen Räumen $L^p((-\pi, \pi))$, $1 \leq p \leq \infty$.

Abgabe am Mittwoch, 19. Januar, in der Vorlesung.