
Aufgabe 1 (*Zur schwachen Konvergenz*)
Seien X, Y Banachräume, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X'$. Zeigen Sie:

(i) $x_k \to x \Rightarrow x_k \rightharpoonup x$, und $\phi_k \to \phi \Rightarrow \phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi$.

(ii) $x_k \to x$ und $\phi_k \overset{*}{\rightharpoonup} \phi \Rightarrow \phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(iii) $x_k \rightharpoonup x$ und $\phi_k \to \phi \Rightarrow \phi_k(x_k) \to \phi(x)$.

(iv) $x_k \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_k \to T_x$ für alle $T \in L(X,Y)$.

Aufgabe 2 (*Schwache Konvergenz und nichtlineare Terme I*)
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[k,k+\frac{1}{2}]},\ g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_{[k-\frac{1}{2},k]}.$$

Zeigen Sie, dass die Folgen $f_n, g_n : I = (0,1) \to \mathbb{R}$, mit $f_n(x) = f(nx)$ bzw. $g_n(x) = g(nx)$, sowie $h_n = f_n g_n$ schwach$*$ in $L^\infty(I)$ gegen Funktionen f, g, h konvergieren, dass aber $h \neq fg$ gilt.

Aufgabe 3 (*Schwache Konvergenz und nichtlineare Terme II*)
Betrachten Sie für $\epsilon > 0$ die Funktionen

$$f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_\epsilon(x) = \sqrt{\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}}.$$

Bestätigen Sie $\|f_\epsilon\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\pi}$, und untersuchen Sie f_ϵ sowie f_ϵ^2 für $\varepsilon \searrow 0$ auf schwache Konvergenz.

Aufgabe 4 (*Lemma von Mazur*)
Sei $x_i \to x$ schwach in X. Dann gibt es Konvexkombinationen

$$\widetilde{x}_i = \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{i,j} x_j,\ \text{wobei } \alpha_{i,j} \geq 0,\ \sum_{j=1}^{N_i} \alpha_{i,j} = 1,$$

so dass $\widetilde{x}_i \to x$ bzgl. der Norm in X.

Abgabe am Mittwoch, 26. Januar, in der Vorlesung.