

Aufgabe 1 ($W_0^{1,p}(\Omega) \not\subset W^{1,p}(\Omega)$)

Sei Ω ein offenes Gebiet im \mathbb{R}^n . Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(\Omega)$ nicht dicht ist in $W^{1,p}(\Omega)$.

Aufgabe 2 (*Schwache Ableitung von u^\pm und $|u|$*)

Sei Ω ein offenes Gebiet im \mathbb{R}^n , und $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass die Funktionen $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = -\min(u, 0)$ und $|u|$ ebenfalls in $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ sind, und geben Sie die schwachen Ableitungen an.

Aufgabe 3 (*Niveaumengen von Sobolevfunktionen*)

Sei Ω ein offenes Gebiet in \mathbb{R}^n , und $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$. Zeigen Sie dass für $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$Du(x) = 0 \quad \text{für fast alle } x \in N_c = \{x \in \Omega : u(x) = c\}.$$

Aufgabe 4 (*Transformation schwacher Ableitungen*)

Seien $\Omega, \tilde{\Omega}$ offene Gebiete in \mathbb{R}^n , $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ und $\phi \in C^1(\tilde{\Omega}, \Omega)$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie $u \circ \phi \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\tilde{\Omega})$, genauer $D(u \circ \phi) = ((Du) \circ \phi)D\phi$.

Abgabe am Mittwoch, 2. Februar, in der Vorlesung.