
Aufgabe 1 (*$W^{1,\infty}$-Funktionen und Lipschitzstetigkeit*)
Zeigen Sie $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2 (*Randwerte von Sobolevfunktionen*)
Sei $C^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < 1\}$, und $C^n_- = \{x \in C^n : x_n < 0\}$. Konstruieren Sie für $1 \leq p \leq \infty$ eine stetige, lineare Abbildung $\tau : W^{1,p}(C^n_-) \to L^p(C^{n-1})$, so dass gilt:

$$\tau(u) = u|_{C^{n-1}} \text{ für alle } u \in W^{1,p}(C) \cap C^0(C^n_- \cup C^{n-1}).$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass die Funktionen $u_z : C^{n-1} \to \mathbb{R}$, $u_z(y) := u(y,z)$, für $z \nearrow 0$ eine Cauchyfolge in $L^p(C^{n-1})$ bilden.

Aufgabe 3 (*Gagliardo-Nirenberg Interpolationsabschätzung*)
Sei $f \in L^p \cap W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ für $q < n$. Dann ist $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ für alle $r \in [p, q^*]$, wobei $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, und mit einer Konstanten $C = C(n,p,q,r) < \infty$ gilt die Interpolationsungleichung

$$\|f\|_{L^r} \leq C\,\|f\|_{L^p}^{1-\alpha} \|Df\|_{L^q}^{\alpha}, \qquad \text{wobei } \alpha = \frac{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}}.$$

Aufgabe 4 (*Poincaré-Ungleichung*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Beweisen Sie durch Widerspruch: es gibt eine Konstante $C = C(p, \Omega) < \infty$ mit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\,\|Du\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{für alle } u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ mit } \int_\Omega u(x)\,dx = 0.$$

Abgabe am Mittwoch, 9. Februar, in der Vorlesung.