Aufgabe 1 (*Präkompakte Mengen in $C^0([0,1])$*)
Untersuchen Sie, ob die Menge $\mathcal{F} = \{f_k : k \in \mathbb{N}\}$ in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{C^0})$ präkompakt ist:

(1) $f_k(x) = \sin(x+k)$.

(2) $f_k(x) = \sin(kx)$.

Aufgabe 2 (*Hölderstetigkeit der Potenzfunktion*)
Für welche $\beta \in [0,1]$ ist die Funktion $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u(x) = x^\alpha$ in $C^{0,\beta}([0,1])$?

Aufgabe 3 (*Peanokurven*)
Die Cantormenge ist definiert als die Menge aller Zahlen, die eine triadische Entwicklung ohne die Ziffer 1 erlauben:

$$C = \{t \in [0,1] : t = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j 3^{-j} \text{ mit } \tau_j \in \{0,2\} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.\}$$

Sei Δ ein $30-60-90°$-Dreieck. Durch sukzessives Einziehen von Höhen wird dieses zunächst in zwei ähnliche Dreeicke Δ_0 und Δ_2, dann weiter in vier ähnliche Dreeicke $\Delta_{00}, \Delta_{02}, \Delta_{20}, \Delta_{22}$ zerlegt, und so weiter. Die Ziffer 0 soll dabei der Wahl des kleineren Dreiecks entsprechen. Wir erhalten eine Abbildung $c : C \to \Delta$, indem wir die Zahl $t = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_j 3^{-j}$ auf den Punkt abbilden, der durch die Dreeickschachtelung $\Delta_{\tau_1} \cap \Delta_{\tau_1\tau_2} \cap \ldots$ definiert wird. Zeigen Sie, dass sich c zu einer Hölderstetigen, surjektiven Abbildung $\widetilde{c} : [0,1] \to \Delta$ fortsetzen lässt.

Aufgabe 4 (*Quotientenraum*)
Sei V abgeschlossener Unterraum eines Banachraums X. Zeigen Sie, dass durch

$$\|\,[x]\,\| = \inf_{v \in V} \|x+v\| \quad \text{für } [x] \in X/V$$

eine Norm definiert ist, mit der X/V ein Banachraum ist.

Abgabe am Mittwoch, 3. November, in der Vorlesung