
Aufgabe 1 (*Hausdorffabstand, Teil II*)
Sei $\mathcal{A}$ die Menge der nichtleeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, versehen mit der Metrik (vgl. Aufgabe 4, Serie 1)

$$d(A_1, A_2) = \inf\{\varrho > 0 : A_1 \subset B_\varrho(A_2),\ A_2 \subset B_\varrho(A_1)\},$$

wobei $B_\varrho(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(x, A) < \varrho\}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{A \in \mathcal{A} : A \subset \overline{B_R(0)}\}$ kompakt ist.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Arzela-Ascoli auf die Funktionen $f_A : \overline{B_R(0)} \to [0,\infty)$, $f_A(x) = dist(x, A)$, an.

Aufgabe 2 (*zur Hölderstetigkeit*)
Konstruieren Sie eine Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^{0,1}([0,1])$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f_k \to 0$ in $C^{0,\alpha}([0,1])$ mit $k \to \infty$ für alle $\alpha < 1$.

(ii) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt keine Teilfolge, die in $C^{0,1}([0,1])$ konvergiert.

Aufgabe 3(*Kartesisches Produkt von Banachräumen*)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, und

$$\|\cdot\|_{X\times Y} : X \times Y \to \mathbb{R},\ \|(x,y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y.$$

Zeigen Sie:

(1) $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ ist ein normierter Raum.

(2) Sind $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, so auch $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$.

Aufgabe 4 (*Laplaceoperator und C^2-Norm*)
Sei $n \geq 2$. Bestimmen Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\|\Delta u_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon\, \|D^2 u_\varepsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}$$

Anleitung. Machen Sie den Ansatz $u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)h(x)$ für ein harmonisches quadratisches Polynom h, zum Beispiel $h(x) = x_1^2 - x_2^2$, und eine geeignete Abschneidefunktion η_ε.

Abgabe am Mittwoch, 10. November, in der Vorlesung