
Aufgabe 1 (*Ehrling-Lemma*)
Betrachten Sie auf einem Vektorraum X drei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_3$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jede beschränkte Folge in $(X, \|\cdot\|_1)$ besitzt eine Teilfolge, die in $(X, \|\cdot\|_2)$ konvergiert.

(2) Es gibt ein $\Lambda < \infty$ mit $\|x\|_3 \leq \Lambda\, \|x\|_2$ für alle $x \in X$.

Zeigen Sie: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C_\varepsilon < \infty$ mit

$$\|x\|_2 \leq \varepsilon\, \|x\|_1 + C_\varepsilon\, \|x\|_3 \text{ für alle } x \in X.$$

Aufgabe 2 (*Produkt von Hölderstetigen Funktionen*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit einer Sehnen-Bogen-Bedingung, und $\alpha \in [0,1]$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstante $C = C(k, \alpha, \Omega) < \infty$ mit

$$\|uv\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C\, \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}\, \|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \text{ für alle } u, v \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Aufgabe 3 (*Sehnen-Bogen-Bedingung*)
Beweisen Sie, dass eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand die Sehnen-Bogen-Bedingung für eine Konstante $\Lambda < \infty$ erfüllt.

Aufgabe 4 (*Hölder-Abschätzung auf dem Halbraum*)
Sei $0 < \alpha < 1$, und $L_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{ij}^2 u$, wobei $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch ist mit

$$\lambda |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $0 < \lambda \leq \Lambda < \infty$. Beweisen Sie: es gibt eine Konstante $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda) < \infty$, so dass für jede Funktion $u : \mathbb{H} = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ mit $\|u\|_{C^{2,\alpha}(\mathbb{H})} < \infty$ folgende Abschätzung gilt:

$$[D^2 u]_{\alpha,\mathbb{H}} \leq C\, ([L_0 u]_{\alpha,\mathbb{H}} + [D^2 u^0]_{\alpha,\mathbb{R}^{n-1}}.$$

Dabei ist $u^0 : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $u^0(\xi) = u(\xi, 0)$.

Anleitung. Gehen Sie analog zu Lemma 3.3 der Vorlesung vor. Es ergeben sich zwei Fälle, je nachdem ob der Rand des Halbraums beim Reskalieren verschwindet oder nicht.

Abgabe am Mittwoch, 17. November, in der Vorlesung