Übungsaufgaben zur Funktionalanalysis — WS 04/05, Serie 5
Prof. Dr. E. Kuwert, Dr. M. Simon — 17. November 2004

Aufgabe 1 (*Transformation von Differentialgleichungen unter Diffeomorphismen*)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $\phi : \overline{D} \to \overline{B_1(0)}$ ein Diffeomorphismus der Klasse $C^{2,\alpha}$ mit Umkehrabbildung $\psi : \overline{B_1(0)} \to \overline{D}$. Gegeben sei auf D eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$ der Gleichung $Lu = f$, wobei

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu \text{ für } a_{ij}, b_i, c, f \in C^{0,\alpha}(\overline{D}).$$

(1) Welche Gleichung löst die Funktion $v : B_1(0) \to \mathbb{R}$, $v(y) = u(\psi(y))$?

(2) Bestimmen Sie für die transformierte Differentialgleichung $C^{0,\alpha}$-Schranken für die Koeffizenten, sowie die Elliptizitätskonstante.

Aufgabe 2 (*Höhere Regularität*)
Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha \in (0,1)$. Betrachten Sie auf $B_1 = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ eine Lösung $u \in C^{k+2,\alpha}(B_1)$ der Gleichung $Lu = f$ für L wie in Aufgabe 1, wobei $a_{ij}, b_i, c, f \in C^{k,\alpha}(B_1)$. Zeigen Sie die innere Abschätzung

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(B_{\frac{1}{2}})} \leq C \left(\|f\|_{C^{k,\alpha}(B_1)} + \|u\|_{C^0(B_1)} \right).$$

Hinweis. Berechnen Sie eine Gleichung für $\partial_k u$, und verwenden sie Induktion.

Aufgabe 3 (*Schwaches Maximumprinzip*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Gegeben sei eine Lösung $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ der Differentialungleichung

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu \geq 0 \text{ auf } \Omega,$$

wobei die Koeffizienten $a_{ij}, b_i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften haben:

(a) Es gibt ein $\lambda > 0$ mit $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2$ für alle $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(b) Es gibt ein $\beta < \infty$ mit $|b(x)| \leq \beta$ für alle $x \in \Omega$.

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) Ist $c \equiv 0$, so gilt $\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u$.

(2) Ist $c \leq 0$, so gilt $\sup_\Omega u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$ mit $u^+(x) = \max(u(x), 0)$.

Hinweis: Hat $v \in C^2(\Omega)$ in $x_0 \in \Omega$ ein lokales Maximum, so gilt $D^2 v(x_0) \leq 0$. Untersuchen Sie für (1) die Funktionen $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \exp(\gamma x_1)$, mit $\gamma > 0$ hinreichend groß. Berechnen Sie insbesondere Lu_ε. Aussage (2) folgt durch Anwendung von (1) auf $\Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > 0\}$.

Abgabe am Mittwoch, 24. November, in der Vorlesung