Aufgabe 1 (*Fixpunktsatz von Banach*)
Sei (X,d) vollständiger metrischer Raum und $F: X \to X$ kontrahierend, i.e.

$$\exists\, k \in [0,1) \text{ mit } d(F(x),F(y)) \leq k\, d(x,y) \text{ für alle } x,y \in X.$$

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(1) Es gibt höchstens ein $x \in X$ mit $F(x) = x$.

(2) Ist $x_0 \in X$ und x_n rekursiv definiert durch $x_{n+1} = F(x_n)$, so gilt

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad \text{und} \quad \|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{1-k} \|x_1 - x_0\|.$$

(3) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen eine Lösung der Gleichung $F(x) = x$.

Aufgabe 2 (*Exponentialabbildung*)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $A \in L(X,X)$. Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$x'(t) = Ax(t) \text{ für } t \in \mathbb{R},\ x(0) = x_0.$$

für jedes $x_0 \in X$ eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Aufgabe 3 (*Zur Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung*)
Sei $\mathrm{GL}(X,Y) \subset L(X,Y)$ die (offene) Menge der invertierbaren Operatoren von X nach Y. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : \mathrm{GL}(X,Y) \to \mathrm{GL}(X,Y),\ \phi(A) = A^{-1}$$

differenzierbar ist mit Ableitung $D\phi(A)\cdot B = -A^{-1}BA^{-1}$.

Hinweis. Verwenden Sie für $\|\mathrm{Id} - A^{-1}B\| < 1$ die Darstellung

$$\phi(B) = (R_{A^{-1}} \circ F)(\mathrm{Id} - L_{A^{-1}}(B))$$

mit $L_{A^{-1}}(B) = A^{-1}B$, $R_{A^{-1}}(B) = BA^{-1}$ und $F(Q) = \sum_{k=0}^{\infty} Q^k$.

Aufgabe 4 (*Elliptische Operatoren: abgeschlossenes Bild*)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offenes und beschränktes Gebiet der Klasse $C^{2,\alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$, und

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_{ij}^2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i \partial_i u + cu$$

elliptisch mit Konstante $\lambda > 0$ sowie mit Koeffizienten in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Zeigen Sie: ist $X \subset C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ ein abgeschlossener Unterraum mit $\ker L \cap X = \{0\}$, so gibt es eine Konstante $C < \infty$ mit

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \, \|Lu\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \text{ für alle } u \in X,$$

und $L(X)$ ist abgeschlossener Unterraum von $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Bemerkung. Wir wissen bereits, dass $\ker L$ endlichdimensional ist. Mit Hahn-Banach werden wir ein abgeschlossenes Komplement X von $\ker L$ konstruieren. Also ist $L(C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}))$ abgeschlossen in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Abgabe am Mittwoch, 1. Dezember, in der Vorlesung